GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC

A. N. Whitehead

(Người dịch: Nguyễn Hữu Điển)

Title: An Introduction to Mathematics

Author: Alfred North Whitehead

Release Date: December 6, 2012 [EBook #41568]
Most recently updated: June 11, 2021

Language: English

Character set encoding: UTF-8

TRANSCRIBER'S NOTE

The camera-quality files for this public-domain ebook may be downloaded *gratis* at

www.gutenberg.org/ebooks/41568.

This ebook was produced using scanned images and OCR text generously provided by the University of California, Santa Barbara, through the Internet Archive.

Minor typographical corrections and presentational changes have been made without comment.

This PDF file is optimized for screen viewing, but may be recompiled for printing. Please consult the preamble of the LaTeX source file for instructions and other particulars.

HOME UNIVERSITY LIBRARY
OF MODERN KNOWLEDGE

AN INTRODUCTION TO MATHEMATICS

BY A. N. WHITEHEAD, SC.D., F.R.S.

LONDON
WILLIAMS & NORGATE

HENRY HOLT & CO., NEW YORK
CANADA: WM. BRIGGS, TORONTO
INDIA: R. & T. WASHBOURNE, LTD.

MỤC LỤC

CHƯƠNG		TRANG
I	BẢN CHẤT TRỪU TƯỢNG CỦA TOÁN HỌC	1
II	BIẾN SỐ	6
III	PHƯƠNG PHÁP ÁP DỤNG	12
IV	ĐỘNG LỰC HỌC	23
V	BIỂU TƯỢNG CỦA TOÁN HỌC	34
VI	KHÁI QUÁT VỀ SỐ	43
VII	SỐ ẢO	53
VIII	SỐ ẢO (TIếP TụC)	63
IX	HÌNH HỌC TỌA ĐỘ	71
X	PHẦN HÌNH NÓN	82
XI	HÀM SỐ	94
XII	ĐỊNH KỲ TRONG TỰ NHIÊN	106
XIII	LƯỢNG GIÁC	112
XIV	CHUỖI	125
XV	PHÉP TÍNH VI PHÂN	141
XVI	HÌNH HỌC	153
XVII	ĐỊNH LƯỢNG	159
	GHI CHÚ	163
	TÀI LIỆU THAM KHẢO	165
	INDEX	166

GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC

CHƯƠNG I

BẢN CHẤT TRỪU TƯỢNG CỦA TOÁN HỌC

NGHIÊN CỨU về toán học có khả năng bắt đầu trong sự thất vọng. Các ứng dụng quan trọng của khoa học, mối quan tâm về mặt lý thuyết đối với các ý tưởng của nó và tính chặt chẽ hợp lý của các phương pháp của nó, tất cả tạo ra kỳ vọng về việc giới thiệu nhanh chóng các quy trình quan tâm. Chúng ta được biết rằng nhờ nó mà các ngôi sao đếm được và hàng tỷ phân tử trong một giọt nước được cân. Tuy nhiên, giống như bóng ma của cha Hamlet, môn khoa học vĩ đại này lẩn tránh những nỗ lực của vũ khí tinh thần của chúng ta để nắm bắt nó—" 'Nó ở đây, 'nó ở đó, 'nó biến mất"—và những gì chúng ta thấy không đề xuất cùng một lời bào chữa cho sự ảo tưởng như đủ cho bóng ma, rằng nó quá cao quý đối với các phương pháp thô thiển của chúng ta. "Một màn bạo lực", nếu có thể bào chữa được, chắc chắn có thể được "cung cấp" cho các kết quả tầm thường chiếm các trang của một số chuyên luận toán học cơ bản.

Lý do khiến ngành khoa học này không xứng với danh tiếng của nó là vì những ý tưởng cơ bản của nó không được giải thích cho sinh viên, không bị vướng mắc vào quy trình kỹ thuật đã được phát minh ra để tạo điều kiện thuận lợi cho việc trình bày chính xác chúng trong những trường hợp cụ thể. Theo đó, người học kém may mắn thấy mình phải vật lộn để có được kiến thức về một khối lượng chi tiết không được soi sáng bởi bất kỳ khái niệm chung nào. Không còn nghi ngờ gì nữa, phương tiện kỹ thuật là điều kiện tiên quyết cho hoạt động tinh thần có giá trị: chúng ta sẽ không đánh giá đúng nhịp điệu của Milton, hay niềm say mê của Shelley, chừng nào chúng ta thấy cần phải đánh vần các từ và không hoàn toàn chắc chắn về các hình thức. của các chữ cái riêng lẻ. Theo nghĩa này, không có con đường hoàng gia để học

tập. Nhưng cũng là một sai lầm nếu chỉ chú ý đến các quy trình kỹ thuật mà không xem xét các ý tưởng chung. Đây là con đường đến với sư phạm.

Mục tiêu của các Chương tiếp theo không phải là dạy toán, mà là giúp học sinh ngay từ đầu khóa học đã biết khoa học nói về cái gì và tại sao nó nhất thiết phải là nền tảng của tư duy chính xác khi áp dụng cho các hiện tượng tự nhiên. Tất cả các ám chỉ trong phần sau đến các suy luận chi tiết trong bất kỳ phần nào của khoa học sẽ được đưa vào chỉ nhằm mục đích làm ví dụ và chúng tôi sẽ cẩn thận để làm cho lập luận chung trở nên dễ hiểu, ngay cả khi đây đó có một số quy trình kỹ thuật hoặc biểu tượng mà người đọc không hiểu được trích dẫn cho mục đích minh họa.

Lần đầu tiên hầu hết mọi người làm quen với toán học là thông qua số học. Hai cộng hai bằng bốn thường được coi là một loại mệnh đề toán học đơn giản mà mọi người đều đã từng nghe nói đến. Do đó, số học sẽ là một chủ đề tốt để xem xét nhằm khám phá, nếu có thể, đặc điểm rõ ràng nhất của khoa học. Bây giờ, thực tế đáng chú ý đầu tiên về số học là nó áp dụng cho mọi thứ, mùi vị và âm thanh, táo và thiên thần, ý tưởng của tâm trí và xương của cơ thể. Bản chất của vạn vật là hoàn toàn không phân biệt, trong vạn vật, hai với hai là bốn. Do đó, chúng tôi viết ra đặc điểm hàng đầu của toán học là nó xử lý các tính chất và ý tưởng có thể áp dụng cho các sự vật chỉ vì chúng là các sự vật, và tách biệt với bất kỳ cảm giác, cảm xúc hoặc cảm giác cụ thể nào, theo bất kỳ cách nào có liên quan đến chúng. Đây là ý nghĩa của việc gọi toán học là một khoa học trừu tượng.

Kết quả mà chúng tôi đã đạt được xứng đáng được chú ý. Thật tự nhiên khi nghĩ rằng một ngành khoa học trừu tượng không thể có nhiều tầm quan trọng trong các vấn đề của đời sống con người, bởi vì nó đã bỏ qua mọi sự quan tâm thực sự khi xem xét. Cần nhớ rằng Swift, trong phần mô tả về chuyến đi của Gulliver tới Laputa, đã có hai ý kiến về điểm này. Anh ấy mô tả các nhà toán học của đất nước đó là những kẻ mơ mộng ngớ ngẩn và vô dụng, những người phải được đánh thức bởi những kẻ lập dị.

Ngoài ra, người thợ may toán học đo chiều cao của anh ta bằng một góc phần tư, và suy ra các chiều khác của anh ta bằng quy tắc và la bàn, tạo ra một bộ quần áo rất không vừa vặn. Mặt khác, các nhà toán học của Laputa, bằng phát minh kỳ diệu của họ về hòn đảo từ tính lơ lửng trong không trung, đã cai trị đất nước và duy trì uy quyền đối với thần dân của họ. Swift, thực sự, đã sống vào một thời điểm đặc biệt không phù hợp với những lời giễu cợt của các nhà toán học đương thời. *Principia* của Newton vừa được viết ra, một trong những lực lượng vĩ đại đã biến đổi thế giới hiện đại. Swift cũng có thể đã cười trước một trận động đất.

Nhưng chỉ đơn thuần liệt kê những thành tựu của toán học là một cách không thỏa đáng để đi đến một ý tưởng về tầm quan trọng của nó. Thật đáng để dành một chút suy nghĩ để tìm ra lý do gốc rễ tại sao toán học, do tính rất trừu tượng của nó, phải luôn là một trong những chủ đề quan trọng nhất để suy nghĩ. Chúng ta hãy cố gắng làm rõ tại sao những giải thích về thứ tự của các sự kiện lại nhất thiết có xu hướng trở thành toán học.

Xem xét cách tất cả các sự kiện được kết nối với nhau. Khi chúng ta nhìn thấy tia chớp, chúng ta lắng nghe tiếng sấm; nghe gió thì tìm sóng biển; vào mùa thu se lạnh, lá rụng. Trật tự ngự trị khắp mọi nơi, để khi một số trường hợp đã được ghi nhận, chúng ta có thể thấy trước rằng những trường hợp khác cũng sẽ có mặt. Sự tiến bộ của khoa học bao gồm việc quan sát những mối liên kết này và bằng sự khéo léo kiên nhẫn chỉ ra rằng các sự kiện của thế giới luôn chuyển động này chẳng qua chỉ là những ví dụ về một vài mối liên hệ hoặc quan hệ chung được gọi là các quy luật. Thấy được cái chung trong cái riêng và cái thường hằng trong cái nhất thời là mục đích của tư tưởng khoa học. Dưới con mắt khoa học, sự rơi của một quả táo, chuyển động của một hành tinh quanh mặt trời và sự bám của bầu khí quyển vào trái đất đều được coi là những ví dụ về định luật hấp dẫn. Khả năng tháo gỡ những hoàn cảnh phù du phức tạp nhất thành những ví dụ khác nhau về các quy luật vĩnh cửu là ý tưởng thống trị của tư duy

hiện đại.

Bây giờ chúng ta hãy nghĩ về loại định luật mà chúng ta muốn để thực hiện hoàn toàn lý tưởng khoa học này. Kiến thức của chúng ta về các sự kiện cụ thể của thế giới xung quanh có được từ các cảm giác của chúng ta. Chúng ta thấy, nghe, nếm, ngửi, cảm thấy nóng, lạnh, rặn, xoa, đau, ngứa ran. Đây chỉ là những cảm giác cá nhân của chúng ta: cơn đau răng của tôi không thể là cơn đau răng của bạn, và thị giác của tôi không thể là thị giác của bạn. Nhưng chúng tôi cho rằng nguồn gốc của những cảm giác này là do mối quan hệ giữa những sự vật hình thành nên thế giới bên ngoài. Do đó, nha sĩ không nhổ răng đau mà nhổ răng. Và không chỉ vậy, chúng ta còn cố gắng hình dung thế giới như một tập hợp các sự vật được kết nối làm nền tảng cho mọi nhận thức của tất cả mọi người. Không có một thế giới vạn vật cho cảm giác của tôi và một thế giới khác cho cảm giác của bạn, mà là một thế giới mà cả hai chúng ta đều tồn tại. Đó là cùng một chiếc răng cho cả nha sĩ và bệnh nhân. Ngoài ra, chúng ta nghe và chúng ta chạm vào cùng một thế giới như chúng ta thấy.

Do đó, thật dễ dàng để hiểu rằng chúng tôi muốn mô tả các mối liên hệ giữa những sự vật bên ngoài này theo một cách nào đó không phụ thuộc vào bất kỳ cảm giác cụ thể nào, thậm chí không phụ thuộc vào tất cả các cảm giác của bất kỳ người cụ thể nào. Nếu có thể, các quy luật được thỏa mãn bởi diễn biến của các sự kiện trong thế giới của những sự vật bên ngoài phải được mô tả theo một kiểu phổ quát trung lập, giống nhau đối với người mù cũng như người điếc, và giống nhau đối với những sinh vật có khả năng vượt quá tầm hiểu biết của chúng ta, con người bình thường.

Nhưng khi chúng ta gạt bỏ những cảm giác tức thời sang một bên, thì phần hữu dụng nhất—từ sự rõ ràng, xác định và phổ quát của nó—của những gì còn lại bao gồm những ý tưởng chung của chúng ta về các thuộc tính hình thức trừu tượng của sự vật; trên thực tế, những ý tưởng toán học trừu tượng đã đề cập ở trên. Do đó, từng bước một, và không nhận ra ý nghĩa đầy

đủ của quá trình, nhân loại đã được dẫn đến việc tìm kiếm một mô tả toán học về các tính chất của vũ trụ, bởi vì chỉ có như vậy mới có thể có một ý tưởng chung về quá trình của vũ trụ. các sự kiện được hình thành, không liên quan đến những người cụ thể hoặc các loại cảm giác cụ thể. Ví dụ, trong bữa ăn tối, người ta có thể hỏi: "Cái gì làm cơ sở cho thị giác của tôi, xúc giác của bạn, vị giác và khứu giác của anh ấy?" câu trả lời là "một quả táo." Nhưng cuối cùng nó phân tích, khoa học tìm cách mô tả một quả táo theo vị trí và chuyển động của các phân tử, một mô tả bỏ qua tôi, bạn và anh ấy, đồng thời cũng bỏ qua thị giác, xúc giác, vị giác và khứu giác. Do đó, các ý tưởng toán học, bởi vì chúng trừu tượng, cung cấp đúng những gì cần thiết cho một mô tả khoa học về tiến trình của các sự kiện.

Điểm này thường bị hiểu sai, bị nghĩ quá hẹp. Pythagoras đã thoáng thấy điều đó khi tuyên bố rằng con số là nguồn gốc của vạn vật. Trong thời hiện đại, niềm tin rằng lời giải thích cuối cùng của về vạn vật có thể tìm thấy trong cơ học Newton là một sự ngụy tạo cho sự thật rằng tất cả khoa học khi nó phát triển theo hướng hoàn thiện đều trở thành toán học trong các ý tưởng của nó.

CHƯƠNG II

CÁC BIẾN

TOÁN HỌC với tư cách là một môn khoa học bắt đầu khi một người đầu tiên, có thể là người Hy Lạp, chứng minh các mệnh đề về *bất kỳ* sự vật hoặc về *một số* sự vật, mà không có sự xác định rõ ràng về những sự vật cụ thể. Những mệnh đề này lần đầu tiên được người Hy Lạp đưa ra cho hình học; và theo đó, hình học là môn khoa học toán học vĩ đại của Hy Lạp. Sau sự trỗi dậy của hình học, nhiều thế kỷ trôi qua trước khi đại số bắt đầu thực sự hiệu quả, bất chấp một số dự đoán mờ nhạt của các nhà toán học Hy Lạp sau này.

Ý tưởng về *bất kỳ* và *một số* được đưa vào đại số bằng cách sử dụng các chữ cái, thay vì các số xác định của số học. Do đó, thay vì nói rằng $2 + 3 = 3 + 2$, trong đại số chúng ta tổng quát hóa và nói rằng, nếu x và y là viết tắt của *bất kỳ* hai số, thì $x + y = y + x$. Một lần nữa, thay vì nói rằng $3 > 2$, chúng ta tổng quát hóa và nói rằng nếu x be *bất kỳ* số thì tồn tại *một số* số (hoặc các số) y sao cho $y > x$. Nhân tiện, chúng tôi có thể nhận xét rằng giả định thứ hai này—vì khi được đặt ở dạng tối hậu nghiêm ngặt, nó là một giả định—là có tầm quan trọng sống còn, đối với cả triết học và toán học; vì nó đưa ra khái niệm về vô cực. Có lẽ nó đòi hỏi sự ra đời của các chữ số Ả Rập, theo đó việc sử dụng các chữ cái đại diện cho các số xác định đã bị loại bỏ hoàn toàn trong toán học, để gợi ý cho các nhà toán học về sự tiện lợi về mặt kỹ thuật của việc sử dụng các chữ cái cho các ý tưởng *bất kỳ* số và *một vài* số. Người La Mã sẽ nêu số năm mà điều này được viết dưới dạng MDCCCCX., trong khi chúng tôi viết nó 1910, do đó để lại các chữ cái cho cách sử dụng khác. Nhưng đây chỉ là một suy đoán. Sau sự xuất hiện của đại số, phép tính vi phân được phát minh bởi Newton và Leibniz, và sau đó là sự tạm dừng trong tiến trình của triết lý tư duy toán học cho đến khi các khái niệm này được quan tâm; và chỉ trong vài năm gần đây, người ta mới nhận ra

rằng *bất kỳ* và *một vài* cơ bản như thế nào đối với bản chất của toán học, với kết quả là mở ra nhiều chủ đề hơn nữa để khám phá toán học.

Bây giờ chúng ta hãy lập một số phát biểu đại số đơn giản, với mục đích hiểu chính xác cách thức những ý tưởng cơ bản này xuất hiện.

(1) Cho *bất kỳ* số x, $x + 2 = 2 + x$;

(2) Cho *một số* số x, $x + 2 = 3$;

(3) Cho *một số* số x, $x + 2 > 3$.

Điểm đầu tiên cần lưu ý là khả năng có trong ý nghĩa của *một số*, như được sử dụng ở đây. Vì $x + 2 = 2 + x$ với mọi số x, nó đúng với *một số* số x. Do đó, như được sử dụng ở đây, *bất kỳ* ngụ ý *một số* và *một số* không loại trừ *bất kỳ*. Một lần nữa, trong ví dụ thứ hai, trên thực tế, chỉ có một số x, sao cho $x + 2 = 3$, cụ thể là chỉ có số 1. Do đó, *một số* chỉ có thể là một số. Nhưng trong ví dụ thứ ba, bất kỳ số nào x lớn hơn 1 đều cho $x + 2 > 3$. Do đó, có vô số số trả lời cho số *một số* trong trường hợp này. Do đó, *một số* có thể là bất cứ thứ gì nằm giữa *bất kỳ* và *một chỉ một*, bao gồm cả hai trường hợp giới hạn này.

Việc thay thế các mệnh đề (2) và (3) bằng các câu hỏi là điều đương nhiên:

$(2')$ Với số nào x thì $x + 2 = 3$;

$(3')$ Với những số nào x thì $x + 2 > 3$.

Xét $(2')$, $x + 2 = 3$ là một phương trình, và dễ dàng nhận thấy nghiệm của nó là $x = 3 - 2 = 1$. Khi chúng ta đặt câu hỏi ngụ ý trong mệnh đề của phương trình $x + 2 = 3$, x được gọi là ẩn số. Đối tượng của nghiệm phương trình là việc xác định ẩn số. Các phương trình có tầm quan trọng lớn trong toán học, và có vẻ như $(2')$ đã minh họa một ý tưởng cơ bản và thấu đáo hơn nhiều so với phát biểu ban đầu (2). Tuy nhiên, đây là một sai lầm hoàn toàn. Ý tưởng về "biến" không xác định xuất hiện trong việc sử dụng "một số" hoặc "bất kỳ" là ý tưởng thực sự quan trọng trong toán học; cái của "ẩn số" trong một phương trình, cái cần

được giải càng nhanh càng tốt, chỉ là công dụng phụ, mặc dù tất nhiên nó rất quan trọng. Một trong những nguyên nhân của sự tầm thường rõ ràng của phần lớn đại số cơ bản là mối bận tâm của sách giáo khoa với giải phương trình. Nhận xét tương tự áp dụng cho nghiệm của bất phương trình $(3')$ so với mệnh đề ban đầu (3).

Nhưng phần lớn các công thức thú vị, , đặc biệt là khi có ý tưởng về *một số*, liên quan đến nhiều hơn một biến. Ví dụ: việc xem xét các cặp số x và y (phân số hoặc tích phân) thỏa mãn $x + y = 1$ liên quan đến ý tưởng về hai biến tương quan, x và y. Khi có hai biến, hai loại câu lệnh chính sẽ xảy ra. Ví dụ: (1) cho *bất kỳ* cặp số, x and y, $x + y = y + x$ và (2) đối với *một số* cặp số, x and y, $x + y = 1$.

Loại mệnh đề thứ hai mời gọi xem xét tổng các cặp số được ràng buộc với nhau bởi một số quan hệ cố định—trong trường hợp đã cho, bởi quan hệ $x + y = 1$. Một cách sử dụng công thức loại thứ nhất, đúng với *bất kỳ* cặp số nào, đó là nhờ chúng, công thức loại thứ hai có thể được chuyển thành vô số dạng tương đương. Ví dụ, quan hệ $x + y = 1$ tương đương với quan hệ

$$y + x = 1, \quad (x - y) + 2y = 1, \quad 6x + 6y = 6,$$

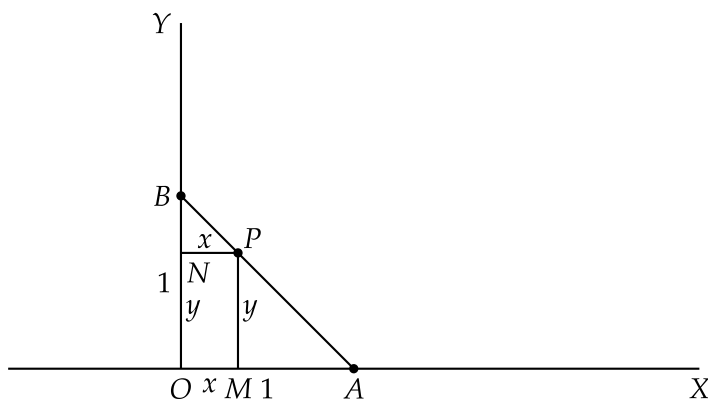
và như thế. Do đó, một nhà toán học khéo léo sử dụng dạng tương đương của biểu thức đang được xem xét, dạng thuận tiện nhất cho mục đích trước mắt của anh ta.

Nói chung, điều không đúng là khi một cặp số hạng thỏa mãn một quan hệ cố định nào đó, nếu một trong các số hạng được cho thì số hạng kia cũng chắc chắn được xác định. Ví dụ: khi x và y thỏa mãn $y^2 = x$, nếu $x = 4$, y có thể là ± 2, do đó, với mọi giá trị dương của x có các giá trị thay thế cho y. Ngoài ra, trong quan hệ $x + y > 1$, khi x hoặc y được cho trước, một số lượng giá trị không xác định vẫn mở cho quan hệ kia.

Một lần nữa, có một điểm quan trọng khác cần được chú ý. Nếu chúng ta giới hạn bản thân ở các số dương, tích phân hoặc phân số, khi xem xét mối quan hệ $x + y = 1$, thì, nếu x hoặc y

lớn hơn 1, thì không có số dương nào khác có thể giả định như vậy để đáp ứng các mối quan hệ. Do đó, "trường" của quan hệ cho x bị giới hạn ở các số nhỏ hơn 1, và tương tự như vậy đối với "trường" mở cho y. Một lần nữa, chỉ xét các số nguyên, dương hoặc âm, và lấy quan hệ $y^2 = x$, thỏa mãn bởi các cặp số như vậy. Sau đó, bất kỳ giá trị tích phân nào được cung cấp cho y, x có thể nhận một giá trị tích phân tương ứng. Vì vậy, "trường" cho y không bị giới hạn giữa các số nguyên dương hoặc âm này. Nhưng "trường" cho x bị hạn chế theo hai cách. Thứ nhất, x phải dương, và thứ hai, vì y là tích phân, nên x phải là một số chính phương. Theo đó, "trường" của x được giới hạn trong tập hợp các số nguyên 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, v.v. on, tức là, tới 1, 4, 9, 16, v.v.

Việc nghiên cứu các tính chất chung của mối quan hệ giữa các cặp số được tạo điều kiện thuận lợi hơn nhiều bằng cách sử dụng sơ đồ được xây dựng như sau:

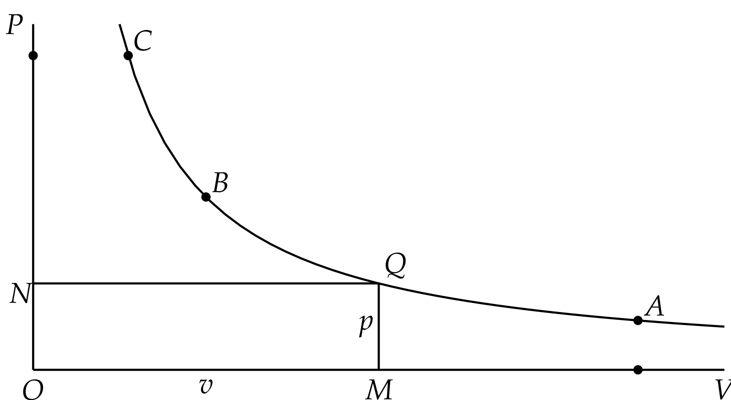


Hình 1.

Vẽ hai đường thẳng OX và OY vuông góc với nhau; hãy để bất kỳ số nào x được biểu thị bằng x đơn vị (theo bất kỳ tỷ lệ nào) có độ dài dọc theo OX, bất kỳ số nào y theo y đơn vị (theo tỷ lệ bất kỳ) độ dài dọc theo OY. Do đó, nếu OM, dọc theo OX, có độ dài x đơn vị và ON, dọc theo OY, có độ dài y đơn vị, bằng cách hoàn thành hình bình hành $OMPN$ mà chúng ta tìm được một điểm P tương ứng với cặp số x and y. Mỗi điểm tương ứng với một cặp số và với mỗi cặp số tương ứng với một điểm. Cặp số đó được

gọi là tọa độ của điểm. Sau đó, các điểm có tọa độ thỏa mãn một hệ thức cố định nào đó có thể được chỉ ra một cách thuận tiện, bằng cách vẽ một đường thẳng nếu tất cả chúng đều nằm trên một đường thẳng hoặc bằng cách tô một vùng nếu chúng đều là các điểm trong vùng. Nếu mối quan hệ có thể được biểu diễn bằng một phương trình chẳng hạn như $x + y = 1$ hoặc $y^2 = x$, thì các điểm nằm trên một đường thẳng, trường hợp trước là đường thẳng và cong trong trường hợp sau . Ví dụ: chỉ xét các số dương, các điểm có tọa độ thỏa mãn $x + y = 1$ nằm trên đường thẳng AB trong Hình 1, trong đó $0A = 1$ và $OB = 1$. Do đó, đoạn thẳng này AB đưa ra một biểu diễn bằng hình ảnh về các thuộc tính của quan hệ dưới sự hạn chế của các số dương.

Một ví dụ khác về mối quan hệ giữa hai biến được cung cấp bằng cách xem xét sự thay đổi về áp suất và thể tích của một khối lượng nhất định của một số chất khí—chẳng hạn như không khí hoặc khí than hoặc hơi nước—không đổi nhiệt độ. Đặt v là số feet khối trong thể tích của nó và p áp suất của nó tính bằng lb. trọng lượng trên mỗi inch vuông. Sau đó, định luật, được gọi là định luật Boyle, biểu thị mối quan hệ giữa p và v khi cả hai đều khác nhau, là tích pv không đổi, luôn giả sử rằng nhiệt độ không thay đổi. Ví dụ, chúng ta hãy giả sử rằng lượng khí và các trường hợp khác của nó sao cho chúng ta có thể đặt $pv = 1$ (con số chính xác ở vế phải của phương trình không tạo ra sự khác biệt cơ bản).



Hình 2.

Sau đó, trong Hình 2, chúng ta lấy hai đường thẳng, OV và OP, ở các góc vuông và vẽ OM dọc theo OV để biểu thị v đơn vị thể tích và ON dọc theo OP để biểu thị p đơn vị áp suất. Sau đó, điểm Q, được tìm thấy bằng cách hoàn thành hình bình hành $OMQN$, biểu thị trạng thái của chất khí khi thể tích của nó là v feet khối và áp suất của nó là p lb. trọng lượng trên mỗi inch vuông . Nếu các trường hợp của phần khí được xem xét sao cho $pv = 1$, thì tất cả các điểm Q tương ứng với bất kỳ trạng thái có thể có nào của phần khí này phải nằm trên đường cong ABC, bao gồm tất cả điểm tại đó p và v dương và $pv = 1$. Do đó, đường cong này đưa ra một biểu diễn bằng hình ảnh về mối quan hệ giữa thể tích và áp suất. Khi áp suất rất lớn, điểm tương ứng Q phải ở gần C, hoặc thậm chí xa hơn C trên phần chưa vẽ của đường cong; thì âm lượng sẽ rất nhỏ. Khi khối lượng lớn Q sẽ gần bằng A, hoặc xa hơn nữa A; và sau đó áp suất sẽ nhỏ. Lưu ý rằng một kỹ sư hoặc nhà vật lý có thể muốn biết áp suất cụ thể tương ứng với một số thể tích được chỉ định rõ ràng. Sau đó, chúng ta có trường hợp xác định *ẩn số* p khi v là một số đã biết. Nhưng đây chỉ là trong trường hợp cụ thể. Khi xem xét một cách tổng quát các tính chất của chất khí và cách thức hoạt động của nó, anh ta phải hình dung trong đầu dạng tổng quát của toàn bộ đường cong ABC và các tính chất chung của nó. Nói cách khác, ý tưởng thực sự cơ bản là cặp *biến* thỏa mãn quan hệ $pv = 1$. Ví dụ này minh họa ý tưởng *biến* là cơ bản như thế nào, cả trong các ứng dụng cũng như trong lý thuyết toán học.

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP ÁP DỤNG

CÁCH mà ý tưởng về các biến thỏa mãn một quan hệ xảy ra trong các ứng dụng của toán học rất đáng để suy nghĩ và bằng cách dành một chút thời gian cho nó, chúng ta sẽ làm sáng tỏ những suy nghĩ của mình về toàn bộ chủ đề.

Chúng ta hãy bắt đầu với những ví dụ đơn giản nhất:—Giả sử rằng chi phí xây dựng là 1*s.* trên mỗi phân khối và 20*s.* kiếm được £1. Sau đó, trong tất cả các tình huống phức tạp liên quan đến việc xây dựng một ngôi nhà mới, giữa tất cả những cảm giác và cảm xúc khác nhau của chủ sở hữu, kiến trúc sư, người xây dựng, những người thợ và những người xem khi ngôi nhà đã hoàn thành, mối tương quan cố định này là theo luật giả định giữ nguyên giữa thể tích khối và chi phí cho chủ sở hữu, cụ thể là nếu x là số phân khối và £y chi phí, thì $20y = x$. Mối tương quan giữa x và y được giả định là đúng đối với việc xây dựng bất kỳ ngôi nhà nào của bất kỳ chủ sở hữu nào. Ngoài ra, khối lượng của ngôi nhà và chi phí không được cho là đã được cảm nhận hoặc nắm bắt bởi bất kỳ cảm giác hoặc khả năng cụ thể nào, hoặc bởi bất kỳ người cụ thể nào. Chúng được nêu một cách chung chung trừu tượng, hoàn toàn không quan tâm đến tâm trạng của chủ sở hữu khi anh ta phải thanh toán hóa đơn.

Bây giờ hãy nghĩ xa hơn một chút về ý nghĩa của tất cả những điều này. Việc xây dựng một ngôi nhà là một tập hợp các tình huống phức tạp. Không thể bắt đầu áp dụng luật, hoặc kiểm tra nó, trừ khi trong quá trình diễn biến chung của các sự kiện, người ta có thể nhận ra một tập hợp các sự kiện nhất định là hình thành một trường hợp cụ thể của việc xây dựng một ngôi nhà. Nói tóm lại, chúng ta phải biết một ngôi nhà khi chúng ta nhìn thấy nó, và phải nhận ra những sự kiện thuộc về tòa nhà của nó. Sau đó, giữa những sự kiện này, do đó được tách biệt trong ý tưởng khỏi phần còn lại của tự nhiên, hai yếu tố chi phí và nội dung khối

phải có thể xác định được; và khi cả hai đều được xác định, nếu định luật đúng, chúng sẽ thỏa mãn công thức chung

$$20y = x.$$

Nhưng luật có đúng không? Bất cứ ai đã từng làm việc nhiều với việc xây dựng sẽ biết rằng chúng ta ở đây đặt chi phí khá cao. Nó chỉ dành cho một loại nhà đắt tiền, nó sẽ hoạt động ở mức giá này. Điều này đưa ra một điểm khác cần được làm rõ. Trong khi chúng ta đang thực hiện các phép tính toán học liên quan đến công thức $20y = x$, chúng ta không quan tâm liệu định luật này đúng hay sai. Trên thực tế, chính ý nghĩa được gán cho x và y, như là một số feet khối và một số bảng Anh, là không quan trọng. Trong quá trình điều tra toán học, trên thực tế, chúng ta chỉ đang xem xét các thuộc tính của mối tương quan này giữa một cặp biến số x và y. Kết quả của chúng tôi sẽ áp dụng tốt như nhau, nếu chúng tôi giải thích y có nghĩa là một số ngư dân và x số lượng cá đánh bắt, do đó luật giả định là trung bình mỗi ngư dân bắt được 20 con cá. Sự chắc chắn về mặt toán học của cuộc điều tra chỉ gắn liền với các kết quả được coi là đưa ra các thuộc tính của mối tương quan $20y = x$ giữa cặp biến số x và y. Không có sự chắc chắn toán học nào về chi phí xây dựng thực tế của bất kỳ ngôi nhà nào. Định luật không hoàn toàn đúng và kết quả nó mang lại sẽ không hoàn toàn chính xác. Trên thực tế, nó cũng có thể sai một cách vô vọng.

Bây giờ tất cả điều này chắc chắn có vẻ rất rõ ràng. Nhưng trên thực tế, với những trường hợp phức tạp hơn, không có sai lầm phổ biến nào hơn là giả định rằng, bởi vì các phép tính toán học chính xác và kéo dài đã được thực hiện, nên việc áp dụng kết quả vào một số thực tế tự nhiên là hoàn toàn chắc chắn. Kết luận của không có lập luận nào có thể chắc chắn hơn các giả định mà từ đó nó bắt đầu. Tất cả các tính toán toán học về quá trình tự nhiên của phải bắt đầu từ một số quy luật tự nhiên giả định, chẳng hạn như quy luật giả định về chi phí xây dựng đã nêu ở trên. Theo đó, tuy nhiên chúng tôi đã tính toán chính xác rằng

một số sự kiện phải xảy ra, sự nghi ngờ vẫn luôn tồn tại — Luật có đúng không? Nếu luật quy định một kết quả chính xác, gần như chắc chắn nó không chính xác tuyệt đối; và do đó, ngay cả khi kết quả tốt nhất, chính xác như đã tính toán, cũng không có khả năng xảy ra. Nhưng sau đó chúng ta không có khả năng quan sát với độ chính xác lý tưởng, vì vậy, xét cho cùng, các định luật không chính xác của chúng ta có thể đủ tốt.

Bây giờ chúng ta sẽ chuyển sang một trường hợp thực tế, đó là trường hợp của Newton và Định luật hấp dẫn. Định luật này phát biểu rằng hai vật thể bất kỳ hút nhau với một lực tỉ lệ thuận với tích các khối lượng của chúng và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng. Do đó, nếu m và M là khối lượng của hai vật, được tính bằng lbs. giả sử, và d dặm là khoảng cách giữa chúng, lực tác dụng lên một trong hai vật, do lực hút của khác và hướng tới nó, tỷ lệ thuận với $\frac{mM}{d^2}$; do đó, lực này có thể được viết bằng $\frac{kmM}{d^2}$, trong đó k là một số xác định tùy thuộc vào độ lớn tuyệt đối của lực hút này và cũng theo thang mà chúng ta chọn để đo lực. Dễ dàng nhận thấy rằng, nếu chúng ta muốn tính các lực như trọng lượng của một vật có khối lượng 1 lb., thì con số mà k đại diện phải cực kỳ nhỏ; vì khi m và M và d được đặt bằng nhau 1, thì $\frac{kmM}{d^2}$ trở thành lực hấp dẫn của hai khối lượng bằng nhau 1 lb. ở khoảng cách một dặm, và điều này là không thể đánh giá được.

Tuy nhiên, giờ đây chúng ta đã có công thức tính lực hấp dẫn. Nếu chúng ta gọi lực này là F, nó là $F = k\frac{mM}{d^2}$, đưa ra mối tương quan giữa các biến F, m, M, và d. Tất cả chúng ta đều biết câu chuyện về cách nó được tìm ra. Nó nói rằng Newton đang ngồi trong vườn cây ăn quả và quan sát quả táo rơi xuống, và sau đó định luật vạn vật hấp dẫn bùng nổ trong tâm trí của ông. Có thể anh ta đã hình thành định luật cuối cùng trong một vườn cây ăn quả, cũng như ở những nơi khác—và chắc hẳn anh ta đã ở đâu đó. Nhưng đối với mục đích của chúng ta, sẽ hữu ích hơn nếu

chúng ta tập trung vào lượng lớn tư tưởng chuẩn bị, sản phẩm của nhiều bộ óc và nhiều thế kỷ, vốn cần thiết trước khi định luật chính xác này có thể được hình thành. Đầu tiên, thói quen toán học trong trí óc và quy trình toán học được giải thích trong hai chương trước phải được tạo ra; nếu không thì Newton có thể không bao giờ nghĩ ra một công thức biểu diễn lực giữa *bất kỳ* hai khối lượng ở khoảng cách *bất kỳ*. Một lần nữa, nghĩa của các thuật ngữ được sử dụng, Lực, Khối lượng, Khoảng cách là gì? Hãy hiểu đơn giản nhất trong các thuật ngữ này, Khoảng cách. Dường như rất hiển nhiên đối với chúng ta khi quan niệm tất cả các sự vật vật chất đều tạo thành một tổng thể hình học nhất định, sao cho khoảng cách của các phần khác nhau có thể đo được theo một đơn vị chiều dài nào đó, chẳng hạn như một dặm hoặc một thước Anh. Đây gần như là khía cạnh đầu tiên của một cấu trúc vật chất xảy ra với chúng ta. Nó là kết quả dần dần của việc nghiên cứu hình học và lý thuyết đo lường. Ngay cả bây giờ, trong một số trường hợp nhất định, các cách suy nghĩ khác vẫn thuận tiện. Ở một quốc gia miền núi, khoảng cách thường được tính bằng giờ. Nhưng bỏ khoảng cách thì các thuật ngữ khác Lực và Khối lượng còn mù mờ hơn nhiều. Sự hiểu biết chính xác về những ý tưởng mà Newton muốn truyền đạt bằng những từ này là một sự phát triển chậm chạp, và quả thật, chính Newton là người đầu tiên nắm vững triệt để các nguyên tắc chung thực sự của Động lực học.

Trong suốt thời trung cổ, dưới ảnh hưởng của Aristotle, khoa học hoàn toàn bị hiểu sai. Newton có lợi thế là đi sau hàng loạt vĩ nhân, đặc biệt là Galileo, ở Ý, người mà trong hai thế kỷ trước đó đã xây dựng lại khoa học và đã phát minh ra cách suy nghĩ đúng đắn về nó. Ông đã hoàn thành công việc của họ. Sau đó, cuối cùng, khi có những ý tưởng về lực, khối lượng và khoảng cách, rõ ràng và rõ ràng trong đầu, đồng thời nhận ra tầm quan trọng và sự liên quan của chúng đối với sự rơi của một quả táo và chuyển động của các hành tinh, anh ấy đã tìm ra luật hấp dẫn và chứng minh nó là công thức luôn thỏa mãn trong các chuyển

động khác nhau này.

Điểm quan trọng trong việc áp dụng công thức toán học là phải có ý tưởng rõ ràng và ước tính chính xác về mức độ liên quan của chúng với các hiện tượng được quan sát. Không kém gì chúng ta, tổ tiên xa xưa của chúng ta đã rất ấn tượng với tầm quan trọng của các hiện tượng tự nhiên và mong muốn thực hiện các biện pháp năng lượng để điều chỉnh chuỗi sự kiện. Dưới ảnh hưởng của những ý tưởng không liên quan, họ đã thực hiện các nghi lễ tôn giáo phức tạp để hỗ trợ sự ra đời của mặt trăng mới và thực hiện các nghi lễ hiến tế để cứu mặt trời trong cuộc khủng hoảng nhật thực. Không có lý do gì để tin rằng họ ngu ngốc hơn chúng ta. Nhưng vào thời điểm đó, không có cơ hội để tích lũy dần dần những ý tưởng rõ ràng và phù hợp.

Cách thức mà khoa học vật lý phát triển thành một dạng có khả năng xử lý bằng các phương pháp toán học được minh họa bằng lịch sử phát triển dần dần của khoa học điện từ. Sấm sét là những sự kiện có quy mô lớn, gây kinh hoàng cho con người và thậm chí cả động vật. Từ những thời kỳ đầu tiên, chúng phải là đối tượng của hoang dã và những giả thuyết tuyệt vời, mặc dù có thể nghi ngờ liệu những khám phá khoa học hiện đại của chúng ta liên quan đến điện không đáng kinh ngạc hơn bất kỳ phép thuật nào lời giải thích của những kẻ man rợ. Người Hy Lạp biết rằng hổ phách (tiếng Hy Lạp là electron) khi cọ xát sẽ thu hút ánh sáng và các vật thể khô. Vào năm 1600 SCN, Tiến sĩ Gilbert, ở Colchester, đã xuất bản tác phẩm đầu tiên về chủ đề mà bất kỳ phương pháp khoa học nào cũng được tuân theo. Ông đã lập một danh sách các chất có đặc tính tương tự như hổ phách; anh ta cũng phải có công trong việc kết nối, tuy nhiên, các hiện tượng điện và từ. Vào cuối thế kỷ 17 và trong suốt thế kỷ 18, tri thức đã phát triển. Máy điện đã được tạo ra, tia lửa được lấy từ chúng; và Leyden Jar đã được phát minh, nhờ đó những hiệu ứng này có thể được tăng cường. Một số kiến thức có tổ chức đã được thu thập; nhưng vẫn không có ý tưởng toán học có liên quan đã được tìm ra. Franklin, vào năm 1752, đã thả một con diều lên mây và

chứng minh rằng giông bão là điện.

Trong khi đó từ kỷ nguyên sớm nhất (2634 TCN), người Trung Quốc đã sử dụng tính chất đặc trưng của kim la bàn, nhưng dường như không liên hệ nó với bất kỳ ý tưởng lý thuyết nào. Tất cả những thay đổi thực sự sâu sắc trong cuộc sống con người đều có nguồn gốc cuối cùng từ tri thức được theo đuổi vì lợi ích của chính nó. Việc sử dụng la bàn không được đưa vào châu Âu cho đến cuối thế kỷ thứ mười hai SCN, hơn 3000 năm sau lần sử dụng đầu tiên ở Trung Quốc. Tầm quan trọng mà khoa học về điện từ kể từ đó đã đảm nhận trong mọi lĩnh vực của đời sống con người không phải do khuynh hướng thực tiễn vượt trội của người châu Âu, mà do thực tế là ở phương Tây, các hiện tượng điện và từ được nghiên cứu bởi những người bị chi phối bởi lợi ích lý thuyết trừu tượng. .

Việc khám phá ra dòng điện là nhờ của hai người Ý, Galvani vào 1780, và Volta vào 1792. Phát minh vĩ đại này đã mở ra một loạt hiện tượng mới để nghiên cứu. Thế giới khoa học giờ đây đã có ba nhóm hiện tượng riêng biệt, mặc dù có liên quan với nhau,—các tác động của điện "tĩnh" phát sinh từ các máy điện ma sát, các hiện tượng từ tính, và các tác động do dòng điện. Từ cuối thế kỷ 18 trở đi, ba hướng nghiên cứu này đã nhanh chóng liên kết với nhau và ngành khoa học hiện đại về điện từ trường được xây dựng, hiện đang đe dọa làm biến đổi cuộc sống con người.

Ý tưởng toán học bây giờ xuất hiện. Trong thập kỷ 1780 đến 1789, Coulomb, một người Pháp, đã chứng minh rằng các cực từ hút hoặc đẩy nhau, tỷ lệ với bình phương nghịch đảo khoảng cách của chúng, và định luật cũng đúng đối với các điện tích—các định luật tương tự một cách kỳ lạ với định luật về lực hấp dẫn. Vào khoảng năm 1820, Öersted, người Đan Mạch, đã phát hiện ra rằng dòng điện tác dụng lực lên nam châm, và gần như ngay sau đó, định luật toán học của lực được Ampère, người Pháp, người cũng đã chứng minh được rằng hai dòng điện tác dụng lực lên nhau. "Việc nghiên cứu thực nghiệm qua đó Am-

père thiết lập định luật về tác dụng cơ học giữa các dòng điện là một trong những thành tựu rực rỡ nhất của khoa học. Toàn bộ, lý thuyết và thí nghiệm, dường như đã nhảy vọt, trưởng thành và được trang bị đầy đủ, từ bộ não của 'Newton về Điện'. Nó là hoàn hảo về hình thức, và không thể có được về độ chính xác, và nó được tóm tắt trong một công thức mà từ đó có thể suy ra tất cả các hiện tượng, và công thức này phải luôn là công thức cơ bản của điện động lực học."*

Các định luật quan trọng về cảm ứng giữa các dòng điện và giữa các dòng điện với nam châm được Michael Faraday phát hiện vào năm 1831-1882. Faraday được hỏi: "Khám phá này có ích lợi gì?" Ông trả lời: "Trẻ em có ích lợi gì—nó lớn lên thành người." Con của Faraday đã lớn thành là con người và hiện là nền tảng của tất cả các ứng dụng hiện đại của điện. Faraday cũng tổ chức lại toàn bộ quan niệm lý thuyết về khoa học. Những ý tưởng của ông, vốn chưa được giới khoa học hiểu hết, đã được Clerk Maxwell mở rộng và đưa vào dạng toán học trực tiếp vào năm 1873. Là kết quả của các nghiên cứu toán học của mình, Maxwell đã nhận ra rằng, trong những điều kiện nhất định, các dao động điện phải được lan truyền. Ông đã ngay lập tức gợi ý rằng những rung động tạo thành ánh sáng là điện. Gợi ý này đã được xác minh kể từ đó, vì vậy giờ đây toàn bộ lý thuyết về ánh sáng không gì khác hơn là một nhánh của ngành khoa học vĩ đại về điện. Ngoài ra, Herz, một người Đức, vào năm 1888, tiếp nối các ý tưởng của Maxwell, đã thành công trong việc tạo ra các dao động điện bằng các phương pháp điện trực tiếp. Các thí nghiệm của ông là cơ sở cho điện báo không dây của chúng tôi.

Trong những năm gần đây, thậm chí nhiều khám phá cơ bản hơn đã được thực hiện và khoa học tiếp tục phát triển về tầm quan trọng lý thuyết cũng như lợi ích thực tế. Bản phác thảo nhanh chóng về tiến trình của nó minh họa cách thức, bằng cách dần dần đưa vào các ý tưởng lý thuyết có liên quan, được đề xuất bởi thực nghiệm và chính chúng đề xuất các thí nghiệm mới, toàn

***Điện và Từ*, Clerk Maxwell, Vol. II., ch. iii.

bộ khối các hiện tượng riêng lẻ và thậm chí tầm thường được hàn lại với nhau thành một ngành khoa học nhất quán, trong đó các kết quả của các suy luận toán học trừu tượng, bắt đầu từ một vài định luật giả định đơn giản, cung cấp lời giải thích cho mớ phức tạp của tiến trình các sự kiện.

Cuối cùng, vượt ra ngoài các ngành khoa học cụ thể về điện từ và ánh sáng, chúng ta có thể khái quát hóa quan điểm của mình hơn nữa, và hướng sự chú ý của chúng ta đến sự phát triển của vật lý toán học được coi là một chương lớn của tư tưởng khoa học. Trước hết, câu chuyện về sự phát triển của nó là gì?

Nó không bắt đầu như một ngành khoa học, hay là sản phẩm của một nhóm người. Những người chăn cừu Chaldean quan sát bầu trời, các đại diện của Chính phủ ở Mesopotamia và Ai Cập đo đạc đất đai, các linh mục và triết gia nghiền ngẫm về bản chất chung của vạn vật. Khối lượng lớn các hoạt động của tự nhiên xuất hiện do các lực bí ẩn không thể dò được. "Gió thổi theo nơi nó nghe" thể hiện chính xác sự vô minh trống rỗng khi đó tồn tại về bất kỳ quy luật ổn định nào được theo sau một cách chi tiết bởi sự nối tiếp của các hiện tượng. Nói chung, sau đó cũng như bây giờ, một quy luật của các sự kiện là bằng sáng chế. Nhưng không thể lần ra dấu vết nào về mối liên hệ giữa chúng, và thậm chí không có kiến thức về cách bắt đầu xây dựng một ngành khoa học như vậy.

Những suy đoán tách rời, một vài bức ảnh vui hoặc không vui về bản chất của sự vật, đã hình thành mức tối đa có thể được tạo ra.

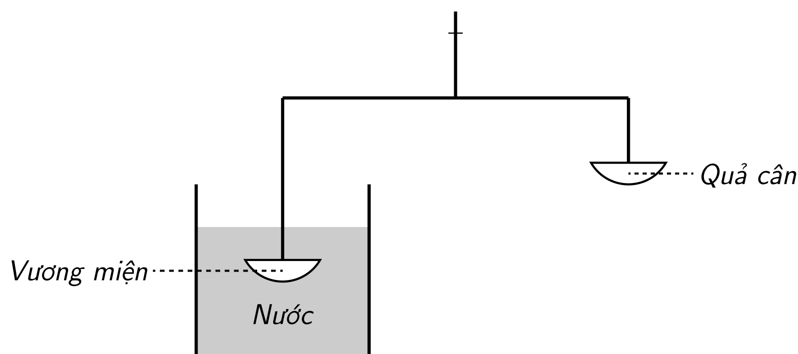
Trong khi đó, các cuộc khảo sát trên mặt đất đã tạo ra hình học, và các quan sát về bầu trời tiết lộ tính đều đặn chính xác của hệ mặt trời. Một số người Hy Lạp sau này, chẳng hạn như Archimedes, chỉ có quan điểm về các hiện tượng cơ bản của thủy tĩnh học và quang học. Thật vậy, Archimedes, người đã kết hợp thiên tài toán học với sự hiểu biết sâu sắc về vật lý, phải được xếp ngang hàng với Newton, người sống gần hai nghìn năm sau, với tư cách là một trong những người sáng lập vật lý toán học. Ông

sống ở Syracuse, thành phố lớn của Hy Lạp ở Sicily. Khi người La Mã bao vây thị trấn (vào năm 212 đến năm 210 TCN), ông được cho là đã đốt cháy tàu của họ bằng cách tập trung vào chúng, bằng gương, tia nắng mặt trời. Câu chuyện rất khó xảy ra, nhưng là bằng chứng rõ ràng về danh tiếng mà ông đã đạt được trong số những người cùng thời nhờ kiến thức về quang học. Vào cuối cuộc bao vây này, anh ta đã bị giết. Theo một lời kể của Plutarch, trong cuộc đời của Marcellus, ông đã được tìm thấy bởi một người lính La Mã đang mải mê nghiên cứu sơ đồ hình học mà ông đã vạch ra trên sàn cát trong phòng của mình. . Anh ta đã không tuân theo mệnh lệnh của kẻ bắt giữ mình ngay lập tức, và vì vậy đã bị giết. Đối với công lao của các tướng lĩnh La Mã, phải nói rằng những người lính đã được lệnh tha cho anh ta. Bằng chứng nội bộ cho câu chuyện nổi tiếng khác của anh ấy là rất mạnh mẽ; vì khám phá được gán cho ông là một khám phá hết sức xứng đáng với thiên tài nghiên cứu toán học và vật lý của ông. May mắn thay, nó đủ đơn giản để được giải thích chi tiết ở đây. Đây là một trong những ví dụ dễ hiểu nhất về phương pháp áp dụng các ý tưởng toán học vào vật lý.

Hiero, Vua của Syracuse, đã gửi một lượng vàng cho một thợ kim hoàn nào đó để làm vật liệu làm vương miện. Ông nghi ngờ rằng những người thợ thủ công đã lấy được một số vàng và cung cấp vị trí của nó bằng cách hợp kim hóa phần còn lại với một số kim loại cơ bản. Hiero gửi vương miện cho Archimedes và yêu cầu anh ta kiểm tra nó. Trong những ngày này, sẽ có vô số thử nghiệm hóa học. Nhưng sau đó Archimedes phải suy nghĩ lại vấn đề. Giải pháp lóe lên trong anh khi anh nằm trong bồn tắm. Anh ta bật dậy và chạy qua các con phố đến cung điện, hét lên *Eureka! Eureka!* (Tôi đã tìm thấy rồi, tôi đã tìm thấy rồi). Ngày này, nếu chúng ta biết đó là ngày nào, nên được tổ chức như ngày sinh nhật của ngành vật lý toán học; khoa học đã trưởng thành khi Newton ngồi trong vườn của mình. Archimedes thực sự đã có một khám phá vĩ đại. Ông thấy rằng một vật thể khi nhúng trong nước bị đẩy lên bởi nước xung quanh với một lực tổng hợp

bằng trọng lượng của nước mà nó chiếm chỗ. Định luật này có thể được chứng minh về mặt lý thuyết từ các nguyên lý toán học của thủy tĩnh học và cũng có thể được kiểm chứng bằng thực nghiệm. Do đó, nếu W lb. là trọng lượng của chiếc vương miện, được cân bằng trong không khí và w lb. là trọng lượng của nước mà nó chiếm chỗ khi được ngâm hoàn toàn, thì $W - w$ sẽ là lực hướng lên bổ sung cần thiết để duy trì vương miện khi nó treo trong nước.

Bây giờ, lực hướng lên này có thể dễ dàng được xác định bằng cách cân cơ thể khi nó lơ lửng trong nước, như thể hiện trong hình đính kèm. Nếu trọng lượng trong thang bên phải là F lb.,



Hình 3.

thì trọng lượng biểu kiến của vương miện trong nước là F lb.; và do đó chúng tôi có

$$F = W - w$$

và như vậy

$$w = W - F,$$

và

$$(A) \qquad \frac{W}{w} = \frac{W}{W - F}$$

trong đó W và F được xác định bằng thao tác cân dễ dàng và khá chính xác. Do đó, theo phương trình (A), $\frac{W}{w}$ đã biết. Nhưng

$\frac{W}{w}$ là tỷ lệ trọng lượng của vương miện với trọng lượng của một thể tích nước tương đương. Tỷ lệ này giống nhau đối với bất kỳ cục kim loại nào của cùng một vật liệu: bây giờ nó được gọi là trọng lượng riêng của vật liệu và chỉ phụ thuộc vào bản chất bên trong của chất chứ không phụ thuộc vào hình dạng hay số lượng của nó. Vì vậy, để kiểm tra xem chiếc vương miện có phải bằng vàng hay không, Archimedes chỉ cần lấy một cục vàng nguyên chất không thể chối cãi và tìm trọng lượng riêng của nó bằng quy trình tương tự. Nếu hai trọng lượng cụ thể đồng ý, vương miện là tinh khiết; nếu họ không đồng ý, nó đã bị hủy hoại.

Lập luận này đã được đưa ra rất dài, bởi vì nó không chỉ là ví dụ chính xác đầu tiên về việc áp dụng các ý tưởng toán học vào vật lý, mà còn bởi vì nó là một ví dụ hoàn hảo và đơn giản về phương pháp và tinh thần của khoa học trong mọi thời đại. .

Cái chết của Archimedes dưới bàn tay của một người lính La Mã là biểu tượng của một sự thay đổi thế giới ở tầm quan trọng đầu tiên: những người Hy Lạp lý thuyết, với tình yêu của họ đối với khoa học trừu tượng, đã bị thay thế trong vai trò lãnh đạo thế giới châu Âu bởi những người La Mã thực tế. Lord Beaconsfield, trong một trong những cuốn tiểu thuyết của mình, đã định nghĩa một người đàn ông thực tế là một người thực hành những sai lầm của tổ tiên mình. Người La Mã là một chủng tộc vĩ đại, nhưng họ bị nguyền rủa bởi tính vô sinh chờ đợi vào tính thực tế. Họ đã không cải thiện kiến thức của tổ tiên họ, và tất cả những tiến bộ của họ chỉ giới hạn ở những chi tiết kỹ thuật nhỏ của kỹ thuật. Họ không phải là những người mơ mộng đủ để đi đến những quan điểm mới, những quan điểm có thể mang lại khả năng kiểm soát cơ bản hơn đối với các lực lượng tự nhiên. Không có người La Mã nào mất mạng vì mải mê suy ngẫm về sơ đồ toán học.

CHƯƠNG IV

ĐỘNG LỰC HỌC

THẾ GIỚI đã phải đợi 1.800 năm cho đến khi các nhà vật lý toán học Hy Lạp tìm được người kế vị. Vào thế kỷ XVI và XVII của thời đại chúng ta, những người Ý vĩ đại, đặc biệt là Leonardo da Vinci, nghệ sĩ (sinh năm 1452, mất năm 1519), và Galileo (sinh năm 1564, mất năm 1642), đã khám phá lại bí mật mà Archimedes đã biết về mối liên hệ giữa các ý tưởng toán học trừu tượng với nghiên cứu thực nghiệm về các hiện tượng tự nhiên. Trong khi đó, sự tiến bộ chậm chạp của toán học và sự tích lũy kiến thức thiên văn chính xác đã đặt các nhà triết học tự nhiên vào một vị trí thuận lợi hơn nhiều cho việc nghiên cứu. Ngoài ra, sự tự khẳng định rất ích kỷ của thời đại đó, tính tham lam trải nghiệm cá nhân của nó, đã khiến các nhà tư tưởng của nó muốn tự mình chứng kiến điều gì đã xảy ra; và bí mật về mối liên hệ giữa lý thuyết toán học và thực nghiệm trong suy luận quy nạp đã được khám phá trên thực tế. Đó là một hành động đặc trưng nổi bật của thời đại mà lẽ ra Galileo, một triết gia, đã thả các quả cân khỏi tháp nghiêng Pisa. Luôn luôn có những người suy nghĩ và những người hành động; vật lý toán học là sản phẩm của một thời đại kết hợp trong cùng một con người những xung lực tư duy với những xung lực hành động

Vấn đề giảm trọng lượng từ tháp này đánh dấu một bước thiết yếu trong kiến thức, không kém bước đầu tiên đạt được những ý tưởng đúng đắn về khoa học động lực học, khoa học cơ bản của toàn bộ chủ đề. Điểm cụ thể gây tranh cãi là liệu các vật có trọng lượng khác nhau có rơi từ cùng một độ cao vào cùng một thời điểm hay không. Theo một câu châm ngôn của Aristotle, được phổ biến rộng rãi cho đến thời đại đó, vật nặng hơn sẽ rơi xuống nhanh hơn. Galileo khẳng định rằng chúng sẽ rơi cùng lúc, và chứng minh quan điểm của mình bằng cách thả các quả cân từ đỉnh tháp nghiêng xuống. Tất cả các ngoại lệ rõ ràng đối với quy

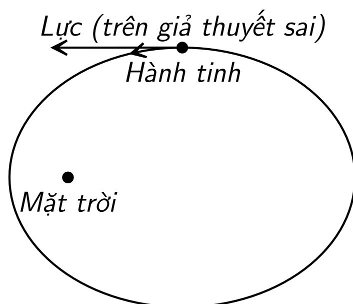
tắc đều phát sinh khi, vì một số lý do, chẳng hạn như cực nhẹ hoặc tốc độ lớn, sức cản của không khí là quan trọng. Nhưng bỏ qua không khí, luật là chính xác.

Thí nghiệm thành công của Galileo không phải là kết quả của của một dự đoán may rủi đơn thuần. Nó nảy sinh từ những ý tưởng đúng đắn của ông liên quan đến quán tính và khối lượng. Định luật đầu tiên của chuyển động, như tuân theo Newton mà chúng ta hiện đang phát biểu, là—Mọi vật thể tiếp tục ở trạng thái nghỉ hoặc chuyển động đều trên một đường thẳng, ngoại trừ khoảng cách mà nó bị ép buộc bởi lực ấn tượng để thay đổi trạng thái đó. Luật này không chỉ là một công thức khô khan: nó còn là một lễ hội chiến thắng những kẻ dị giáo bị đánh bại. Có thể hiểu vấn đề đang tranh luận bằng cách loại bỏ khỏi định luật cụm từ "chuyển động đều trên một đường thẳng." Ở đó, chúng ta thu được điều có thể được coi là công thức đối lập của Aristotle: "Mọi vật tiếp tục ở trạng thái nghỉ ngơi của nó ngoại trừ chừng mực nó bị ép buộc phải thay đổi trạng thái đó."

Trong công thức sai lầm cuối cùng này, người ta khẳng định rằng, ngoài lực lượng, một cơ thể tiếp tục ở trạng thái nghỉ ngơi; và theo đó, nếu một vật thể đang chuyển động, thì cần phải có một lực để duy trì chuyển động đó; sao cho khi lực dừng lại thì chuyển động dừng lại. Định luật Newton thực sự có quan điểm ngược lại. Trạng thái của một vật không chịu tác dụng của lực là trạng thái của chuyển động thẳng đều, và không có ngoại lực hay ảnh hưởng nào được coi là nguyên nhân, hoặc, nếu bạn muốn nói như vậy, là sự đi kèm bất biến của chuyển động này. chuyển động thẳng đều. Phần còn lại chỉ là một trường hợp cụ thể của chuyển động như vậy, chỉ khi vận tốc bằng không. Do đó, khi một vật thể đang chuyển động, chúng ta không tìm kiếm bất kỳ ảnh hưởng bên ngoài nào ngoại trừ việc giải thích những thay đổi về tốc độ của vận tốc hoặc những thay đổi về hướng của nó. Miễn là cơ thể đang chuyển động với cùng tốc độ và theo cùng một hướng thì không cần phải nhờ đến sự trợ giúp của bất kỳ lực nào.

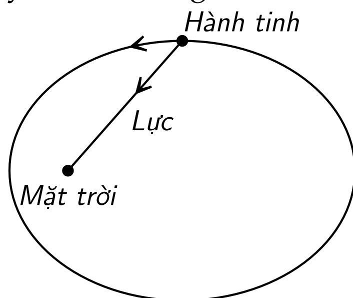
Sự khác biệt giữa hai quan điểm có thể thấy rõ khi tham khảo

lý thuyết về chuyển động của các hành tinh. Copernicus, một người Ba Lan , sinh ra tại Thorn ở Tây Phổ (sinh năm 1473, mất năm 1543), đã cho thấy việc hình dung các hành tinh, bao gồm cả trái đất



Hình 4.

quay quanh mặt trời theo quỹ đạo đơn giản đến mức nào gần tròn; và sau đó, Kepler, , một nhà toán học người Đức, vào năm 1609 đã chứng minh rằng, trên thực tế, quỹ đạo thực tế là hình elip, nghĩa là, một loại đường cong hình bầu dục đặc biệt mà chúng ta sẽ xem xét sau trong chi tiết hơn. Ngay lập tức, câu hỏi đặt ra là đâu là lực bảo toàn các hành tinh trong chuyển động này. Theo quan điểm sai lầm cũ, do Kepler nắm giữ, bản thân vận tốc thực tế đã yêu cầu bảo toàn bằng vũ lực. Vì vậy, anh ấy đã tìm kiếm các lực tiếp tuyến như trong hình kèm theo (4).



Hình 5.

Nhưng theo định luật Newton, ngoài một lực nào đó, hành tinh sẽ chuyển động mãi mãi với vận tốc hiện có của nó theo một đường thẳng, và do đó hoàn toàn rời khỏi mặt trời.

Do đó, Newton đã phải tìm kiếm một lực có thể bẻ cong chuyển động thành quỹ đạo hình elip của nó. Lực này mà anh ấy chỉ ra phải là một lực hướng về phía mặt trời như trong hình tiếp theo (5).

Trên thực tế, lực là lực hấp dẫn của mặt trời tác dụng theo định luật nghịch đảo bình phương khoảng cách, đã được nêu ở trên.

Khoa học cơ học đã phát triển trong số những người Hy Lạp từ việc xem xét lý thuyết về lợi thế cơ học có được khi sử dụng của một đòn bẩy, và cũng từ việc xem xét các vấn đề khác nhau liên quan đến trọng lượng của cơ thể. Cuối cùng, nó đã được đặt trên cơ sở thực sự của nó vào cuối thế kỷ 16 và trong suốt thế kỷ 17, như lời tường thuật trước đây cho thấy, một phần với mục đích giải thích lý thuyết về các vật thể rơi xuống, nhưng chủ yếu là để đưa ra một lý thuyết khoa học về chuyển động của các hành tinh. . Nhưng kể từ những ngày đó, động lực học đã đảm nhận một nhiệm vụ đầy tham vọng hơn, và giờ đây tuyên bố là khoa học cuối cùng mà những khoa học khác chỉ là nhánh. Yêu cầu này dẫn đến điều này: cụ thể là, các phẩm chất khác nhau của sự vật có thể cảm nhận được bằng giác quan chỉ là phương thức đặc biệt của chúng ta trong việc đánh giá cao những thay đổi về vị trí trên một phần của sự vật tồn tại trong không gian. Ví dụ, giả sử chúng ta nhìn vào Tu viện Westminster. Nó đã đứng đó, xám xịt và bất động, trong nhiều thế kỷ qua. Tuy nhiên, theo lý thuyết khoa học hiện đại, màu xám đó, thứ làm tăng cảm giác của chúng ta về sự bất động của tòa nhà, tự nó không là gì khác ngoài cách chúng ta đánh giá cao những chuyển động nhanh chóng của các phân tử cơ bản, tạo thành bề mặt bên ngoài của tòa nhà và truyền các rung động. thành một chất gọi là ether. Một lần nữa, chúng tôi đặt tay lên những viên đá của nó và ghi nhận nhiệt độ mát mẻ, đồng đều của chúng, biểu tượng cho sự nghỉ ngơi yên tĩnh của tòa nhà. Nhưng cảm giác về nhiệt độ này chỉ đơn giản đánh dấu cảm giác của chúng ta về sự truyền nhiệt từ bàn tay sang hòn đá, hoặc từ hòn đá sang bàn tay; và, theo khoa học hiện đại, nhiệt

không là gì khác ngoài sự kích động của các phân tử trong cơ thể. Cuối cùng, đàn organ bắt đầu chơi, và một lần nữa âm thanh không là gì ngoài kết quả của chuyển động của không khí đập vào màng nhĩ.

Vì vậy, nỗ lực đưa ra một lời giải thích năng động về các hiện tượng là nỗ lực giải thích chúng bằng những phát biểu có dạng chung, rằng một chất hoặc vật thể như vậy và như vậy đã ở nơi này và hiện đang ở nơi đó. Do đó, chúng ta đi đến ý tưởng cơ bản tuyệt vời của khoa học hiện đại, rằng tất cả các cảm giác của chúng ta là kết quả của sự so sánh các cấu hình thay đổi của mọi thứ trong không gian tại các thời điểm khác nhau. Do đó, theo đó, các quy luật chuyển động, tức là các quy luật về sự thay đổi cấu hình của sự vật, là những quy luật cơ bản của khoa học vật lý.

Khi ứng dụng toán học vào nghiên cứu triết học tự nhiên, khoa học thực hiện một cách có hệ thống những gì tư duy thông thường làm một cách tình cờ. Khi chúng ta nói về một cái ghế, chúng ta thường muốn nói đến một thứ gì đó mà chúng ta đã nhìn thấy hoặc cảm nhận theo một cách nào đó; mặc dù hầu hết ngôn ngữ của chúng ta sẽ giả định trước rằng có một thứ gì đó tồn tại độc lập với thị giác hoặc cảm giác của chúng ta. Bây giờ trong vật lý toán học, khóa học ngược lại được thực hiện. Chiếc ghế được hình thành mà không có bất kỳ tham chiếu nào đến cụ thể của bất kỳ ai hoặc bất kỳ phương thức nhận thức đặc biệt nào. Kết quả là trong suy nghĩ, chiếc ghế trở thành một tập hợp các phân tử trong không gian, hoặc một nhóm electron, một phần ether đang chuyển động, hoặc tuy nhiên các ý tưởng khoa học hiện tại mô tả nó. Nhưng vấn đề là khoa học quy giản chiếc ghế thành những vật chuyển động trong không gian và ảnh hưởng đến chuyển động của nhau. Sau đó, các yếu tố hoặc yếu tố khác nhau tham gia vào một tập hợp các hoàn cảnh, như được quan niệm như vậy, chỉ là những thứ, như độ dài của đường thẳng, kích thước của góc, diện tích và thể tích, nhờ đó có thể xác định vị trí của các vật thể trong không gian. Tất nhiên, ngoài các yếu tố

hình học này, thực tế chuyển động và thay đổi đòi hỏi phải đưa ra tốc độ thay đổi của các yếu tố đó, nghĩa là vận tốc, vận tốc góc, gia tốc và những thứ tương tự. Theo đó, vật lý toán giải quyết các mối tương quan giữa các biến số được cho là biểu thị mối tương quan tồn tại trong tự nhiên giữa các phép đo của các yếu tố hình học này và tốc độ thay đổi của chúng. Nhưng các định luật toán học luôn xử lý các biến số, và chỉ trong trường hợp không thường xuyên kiểm tra các định luật bằng cách tham khảo các thí nghiệm hoặc trong việc sử dụng các định luật cho các dự đoán đặc biệt thì các số xác định mới được thay thế.

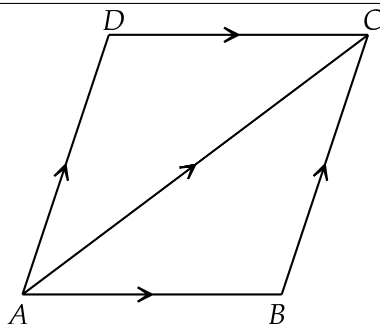
Điểm thú vị về thế giới như do đó được hình thành theo cách trừu tượng này trong suốt quá trình nghiên cứu vật lý toán học, nơi chỉ vị trí và hình dạng của sự vật được xem xét cùng với những thay đổi của chúng, đó là các sự kiện của một thế giới trừu tượng như vậy là đủ để "giải thích" cảm giác của chúng ta. Khi chúng ta nghe thấy một âm thanh, các phân tử của không khí đã bị kích động theo một cách nào đó: do sự kích động đó, hay còn gọi là sóng không khí, tất cả những người bình thường đều nghe thấy âm thanh; và nếu không có sóng không khí, thì không có âm thanh. Và, tương tự, một nguyên nhân hoặc nguồn gốc vật lý, hoặc một sự kiện song song (tùy theo cách diễn đạt của những người khác nhau) làm cơ sở cho những cảm giác khác của chúng ta. Chính suy nghĩ của chúng ta dường như tương ứng với cấu tạo và chuyển động của bộ não; làm tổn thương bộ não và bạn làm tổn thương những suy nghĩ. Trong khi đó các sự kiện của vũ trụ vật chất này nối tiếp nhau theo các định luật toán học bỏ qua mọi cảm giác, suy nghĩ và cảm xúc đặc biệt.

Bây giờ, không còn nghi ngờ gì nữa, đây là khía cạnh chung của mối quan hệ giữa thế giới vật lý toán học với những cảm xúc, cảm giác và suy nghĩ của chúng ta; và rất nhiều tranh cãi đã nổ ra và nhiều giấy mực đã đổ ra. Chúng ta chỉ cần đưa ra một nhận xét. Toàn bộ tình huống đã nảy sinh, như chúng ta đã thấy, từ nỗ lực mô tả một thế giới bên ngoài "giải thích" các cảm giác và cảm xúc cá nhân khác nhau của chúng ta, nhưng cũng là một thế giới

, về cơ bản không phụ thuộc vào bất kỳ cảm giác hoặc cảm xúc cụ thể nào. trên bất kỳ cá nhân cụ thể. Có phải một thế giới như vậy chỉ đơn thuần là một câu chuyện cổ tích khổng lồ? Nhưng những câu chuyện cổ tích rất kỳ quái và độc đoán: nếu thực sự có một thế giới như vậy, thì nó phải tuân theo một mô tả chính xác, mô tả xác định chính xác các bộ phận khác nhau và mối quan hệ qua lại của chúng. Bây giờ, ở một mức độ lớn, thế giới khoa học này tự phục tùng bài kiểm tra này và cho phép các sự kiện của nó được khám phá và dự đoán bởi bộ máy các ý tưởng toán học trừu tượng. Có vẻ như ở đây chúng ta có một xác minh quy nạp cho giả định ban đầu của chúng ta. Phải thừa nhận rằng không có bằng chứng quy nạp nào là kết luận; nhưng nếu toàn bộ ý tưởng về một thế giới tồn tại độc lập với những nhận thức cụ thể của chúng ta về nó là sai lầm, thì nó đòi hỏi sự giải thích cẩn thận tại sao nỗ lực mô tả nó, theo tàn dư toán học của những ý tưởng của chúng ta sẽ áp dụng cho nó, lại dẫn đến một thành công đáng kể như vậy.

Chúng ta sẽ mất quá nhiều thời gian để đi vào giải thích chi tiết về các định luật chuyển động khác. Phần còn lại của chương này phải được dành để giải thích những ý tưởng đáng chú ý vốn là nền tảng, cho cả vật lý toán học và toán học thuần túy: đó là những ý tưởng về đại lượng véc tơ và định luật hình bình hành đối với phép cộng véc tơ. Chúng ta đã thấy rằng bản chất của chuyển động là một vật thể đã ở mức A và bây giờ là C. Sự chuyển đổi này từ A sang C yêu cầu phải giải quyết hai yếu tố riêng biệt trước khi nó được xác định hoàn toàn, đó là độ lớn của nó (tức là chiều dài AC) và hướng của nó. Bây giờ, bất cứ thứ gì, chẳng hạn như sự chuyển giao này, hoàn toàn được cho bởi việc xác định độ lớn

và hướng được gọi là vectơ. Ví dụ, vận tốc yêu cầu định nghĩa của nó là gán độ lớn và hướng. Nó phải là rất nhiều dặm một giờ trong một hướng như vậy và như vậy. Sự tồn tại và độc lập của hai yếu tố này trong việc xác định vận tốc được minh họa rõ ràng qua hành động của thuyền trưởng, người giao tiếp với các cấp



Hình 6.

dưới khác nhau một cách tôn trọng họ: anh ta nói với máy trưởng số hải lý mà anh ta phải đi. hơi nước, và người lái la bàn mang hướng mà anh ta phải giữ. Một lần nữa tốc độ thay đổi của vận tốc, tức là vận tốc cộng thêm trên một đơn vị thời gian, cũng là một đại lượng vectơ: nó được gọi là gia tốc. Tương tự, một lực theo nghĩa động học là một đại lượng vectơ khác. Thật vậy, bản chất vectơ của lực đồng thời tuân theo các nguyên tắc động lực học từ nguyên tắc vận tốc và gia tốc; nhưng đây là một điểm mà chúng ta không cần đi sâu vào. Ở đây đủ để nói rằng một lực tác dụng lên một vật có độ lớn nhất định theo một hướng nhất định.

Bây giờ tất cả các vectơ có thể được biểu diễn bằng đồ thị bằng các đường thẳng. Tất cả những gì phải làm là sắp xếp: (i) một thang đo theo đó đơn vị độ dài tương ứng với đơn vị độ lớn của vectơ—ví dụ: một inch với vận tốc 10 dặm trên giờ trong trường hợp vận tốc, và một inch đối với lực có trọng lượng 10 tấn trong trường hợp lực—và (ii) hướng của đường thẳng trên biểu đồ tương ứng với hướng của vectơ. Sau đó, một đường được vẽ với số inch thích hợp có chiều dài theo hướng thích hợp biểu thị vectơ cần thiết trên thang độ lớn được chỉ định tùy ý. Biểu diễn sơ đồ này của các vectơ có tầm quan trọng đầu tiên. Nhờ sự trợ giúp của nó, chúng ta có thể phát biểu "định luật hình bình hành" nổi tiếng về phép cộng các vectơ cùng loại nhưng theo các hướng khác nhau.

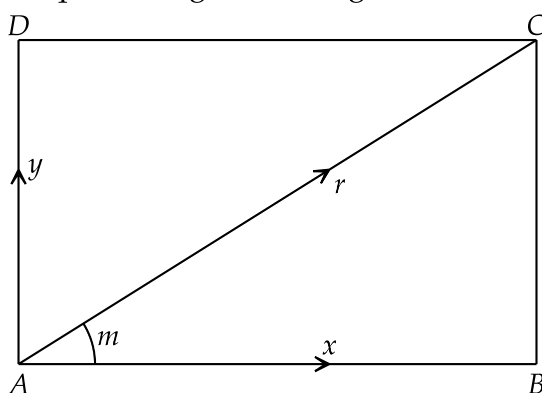
Xét vectơ AC trong Hình 6 là đại diện cho của vị trí đã thay đổi của vật thể từ A thành C: chúng ta sẽ gọi đây là vectơ vận

chuyển. Cần lưu ý rằng, nếu việc quy giản các hiện tượng vật lý thành những thay đổi đơn thuần về vị trí, như đã giải thích ở trên, là đúng, thì tất cả các loại vectơ vật lý khác thực sự có thể quy về loại này theo cách này hay cách khác. Bây giờ, lần vận chuyển cuối cùng từ A đến C cũng bị ảnh hưởng bởi sự vận chuyển từ A đến B và một lần vận chuyển từ B đến C, hoặc, hoàn thành hình bình hành $ABCD$, bằng phương tiện vận chuyển từ A đến D và phương tiện vận chuyển từ D đến C. Những phương tiện vận chuyển này được áp dụng liên tiếp như vậy được cho là cộng lại với nhau. Đây chỉ đơn giản là một định nghĩa về ý nghĩa của việc bổ sung phương tiện vận chuyển. Lưu ý thêm rằng, coi các đường thẳng song song là các đường thẳng được vẽ theo cùng một hướng, thì sự vận chuyển B to C và A to D có thể được coi là sự vận chuyển giống nhau áp dụng cho các vật ở hai vị trí ban đầu B và A. Với quan niệm này, chúng ta có thể nói về sự vận chuyển A to D khi áp dụng cho một vật thể ở bất kỳ vị trí nào, ví dụ tại B. Do đó, chúng ta có thể nói rằng việc vận chuyển A to C có thể được coi là tổng của hai phương thức vận chuyển A to B và A to D được áp dụng theo thứ tự bất kỳ. Ở đây chúng ta có định luật hình bình hành cho việc thêm các phương tiện giao thông: cụ thể là, nếu các phương tiện giao thông là A to B và A to D, hoàn thành hình bình hành $ABCD$, và khi đó tổng của hai là đường chéo AC.

Tất cả điều này thoạt nhìn có vẻ rất giả tạo. Nhưng cần phải nhận thấy rằng chính thiên nhiên đã trình bày cho chúng ta ý tưởng. Ví dụ: một chiếc tàu hơi nước đang di chuyển theo hướng AD (*xem* Hình 6) và một người đàn ông đi ngang qua boong của nó. Nếu nồi hơi đứng yên, trong một phút nữa anh ta sẽ đến B; nhưng trong phút đó, điểm xuất phát của anh ấy A trên bộ bài đã chuyển sang D, và đường đi của anh ấy trên bộ bài đã chuyển từ AB sang DC. Vì vậy, trên thực tế, quá trình vận chuyển của anh ấy đã từ A đến C trên mặt biển. Tuy nhiên, nó được trình bày cho chúng ta được phân tích thành tổng của hai quá trình vận chuyển, cụ thể là, một từ A đến B tương đối so với

tàu hơi nước và một từ A đến D là quá trình vận chuyển của nồi hấp.

Bằng cách tính đến yếu tố thời gian, cụ thể là một phút, biểu đồ vận chuyển của người đàn ông này AC biểu thị vận tốc của anh ta. Vì nếu AC đại diện cho bao nhiêu feet vận chuyển, thì bây giờ nó biểu thị vận chuyển bao nhiêu feet mỗi phút, nghĩa là, nó biểu thị vận tốc của người đàn ông. Khi đó AB và AD đại diện cho hai vận tốc, cụ thể là vận tốc của anh ta đối với chiếc tàu hơi nước, và vận tốc của chiếc tàu hơi nước, mà "tổng" của nó tạo thành vận tốc hoàn chỉnh của anh ta. Rõ ràng là các sơ đồ và định nghĩa liên quan đến vận tốc được biến thành sơ đồ và định nghĩa liên quan đến vận tốc bằng cách hình dung các sơ đồ biểu diễn vận tốc trên một đơn vị thời gian. Một lần nữa, các biểu đồ và định nghĩa liên quan đến vận tốc được biến thành biểu đồ và định nghĩa liên quan đến gia tốc bằng cách coi các biểu đồ là đại



Hình 7.

diện cho các vận tốc được thêm vào mỗi đơn vị thời gian.

Do đó, bằng cách cộng các vectơ vận tốc và vectơ gia tốc, chúng tôi muốn nói đến phép cộng tuân theo định luật hình bình hành.

Ngoài ra, theo định luật chuyển động, một lực được biểu diễn đầy đủ bằng vectơ gia tốc mà nó tạo ra trong một vật có khối lượng cho trước. Theo đó, các lực sẽ được cho là cộng khi hiệu ứng chung của chúng được tính theo định luật hình bình hành.

Do đó, đối với các vectơ cơ bản của khoa học , cụ thể là vận tốc, vận tốc và lực, phép cộng hai bất kỳ cùng loại là tạo ra một vectơ "kết quả" theo quy tắc của định luật hình bình hành.

Cho đến nay, loại hình bình hành đơn giản nhất là hình chữ nhật, và trong toán học thuần túy, là mối quan hệ của vectơ đơn AC với hai vectơ thành phần, AB và AD, ở bên phải các góc (*xem* Hình 7), liên tục lặp lại. Đặt x, y và r đơn vị biểu thị độ dài của AB, AD và AC, và đặt m đơn vị góc biểu thị độ lớn của góc BAC. Sau đó, các mối quan hệ giữa x, y, r, và m, trong tất cả các khía cạnh của chúng là chủ đề lặp đi lặp lại liên tục của toán học thuần túy; và các kết quả thuộc loại cần thiết để áp dụng cho các vectơ cơ bản của vật lý toán học. Biểu đồ này là cây cầu chính mà các kết quả của toán học thuần túy vượt qua để có được ứng dụng cho các sự kiện của tự nhiên.

CHƯƠNG V

BIỂU TƯỢNG CỦA TOÁN HỌC

CHÚNG TA bây giờ quay trở lại toán học thuần túy và xem xét kỹ hơn bộ máy ý tưởng mà từ đó khoa học được xây dựng. Mối quan tâm đầu tiên của chúng tôi là với biểu tượng của khoa học, và chúng tôi bắt đầu với những biểu tượng đơn giản nhất và được biết đến rộng rãi, cụ thể là những biểu tượng của số học.

Giả sử hiện tại chúng ta có ý tưởng đủ rõ ràng về các số nguyên, được biểu thị bằng ký hiệu Ả Rập bởi 0, 1, 2, . . . , 9, 10 , 11, . . . , 100, 101, . . . v.v. Ký hiệu này đã được đưa vào châu Âu thông qua người Ả Rập, nhưng rõ ràng họ đã lấy nó từ các nguồn tiếng Hin-ddi. Tác phẩm đầu tiên được biết đến* trong đó nó được giải thích một cách có hệ thống là công trình của nhà toán học Ấn Độ, Bhaskara (sinh năm 1114 SCN). Nhưng các chữ số thực tế có thể được bắt nguồn từ thế kỷ thứ bảy của thời đại chúng ta, và có lẽ ban đầu được phát minh ra ở Tây Tạng. Tuy nhiên, đối với các mục đích hiện tại của chúng tôi, lịch sử của ký hiệu là chi tiết. Điểm thú vị cần lưu ý là minh họa đáng ngưỡng mộ mà hệ thống số này mang lại tầm quan trọng to lớn của một ký hiệu tốt. Bằng cách giải phóng bộ não khỏi tất cả những công việc không cần thiết, một ký hiệu tốt giúp nó tự do tập trung vào những vấn đề nâng cao hơn, và thực tế là làm tăng sức mạnh tinh thần của cuộc đua. Trước khi ra đời ký hiệu tiếng Ả Rập, phép nhân rất khó và phép chia chẵn của các số nguyên cần đến khả năng toán học cao nhất. Có lẽ không có gì trong thế giới hiện đại có thể khiến một nhà toán học Hy Lạp ngạc nhiên hơn là khi biết rằng, dưới ảnh hưởng của giáo dục bắt buộc, một tỷ lệ lớn dân số Tây Âu có thể thực hiện phép chia cho những số lớn nhất. Sự thật này đối với anh dường như là một điều hoàn toàn không thể xảy ra. Do đó, việc mở rộng ký hiệu cho phân số thập phân đã

---

*Đối với các sự kiện lịch sử chi tiết liên quan đến toán học thuần túy, tôi chủ yếu mang ơn *A Short History of Mathematics*, của W. W. R. Ball.

không được thực hiện cho đến thế kỷ XVII. Sức mạnh hiện đại của chúng ta trong việc tính toán dễ dàng với các phân số thập phân là kết quả gần như kỳ diệu của việc dần dần khám phá ra một ký hiệu hoàn hảo.

Toán học thường được coi là một môn khoa học khó và bí ẩn, bởi vì nó sử dụng rất nhiều biểu tượng. Tất nhiên, không có gì khó hiểu hơn một biểu tượng mà chúng ta không hiểu. Ngoài ra, một biểu tượng, mà chúng ta chỉ hiểu một phần và không quen sử dụng, rất khó theo dõi. Cũng giống như vậy, các thuật ngữ kỹ thuật của bất kỳ nghề nghiệp hoặc thương mại nào cũng không thể hiểu được đối với những người chưa bao giờ được đào tạo để sử dụng chúng. Nhưng điều này không phải vì bản thân họ khó khăn. Ngược lại, chúng luôn được giới thiệu để làm cho mọi thứ trở nên dễ dàng. Vì vậy, trong toán học, với điều kiện là chúng ta đang chú ý nghiêm túc đến các ý tưởng toán học, thì biểu tượng luôn là một sự đơn giản hóa to lớn. Nó không chỉ được sử dụng thực tế, mà còn rất được quan tâm. Vì nó thể hiện sự phân tích các ý tưởng của chủ đề và một sự thể hiện gần như bằng hình ảnh về mối quan hệ của chúng với nhau. Nếu bất kỳ ai nghi ngờ về tiện ích của các ký hiệu, hãy để anh ta viết ra đầy đủ, không có bất kỳ ký hiệu nào, toàn bộ ý nghĩa của các phương trình sau đại diện cho một số định luật cơ bản của đại số*:– -

$$x + y = y + x, \quad (1)$$
$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad (2)$$
$$x \times y = y \times x, \quad (3)$$
$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z), \quad (4)$$
$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z). \quad (5)$$

Ở đây (1) và (2) được gọi là các luật giao hoán và kết hợp cho phép cộng, (3) và (4) là các luật giao hoán và kết hợp cho phép nhân, và (5) là luật phân phối liên quan đến phép cộng và phép nhân. Ví dụ, không có ký hiệu, (1) trở thành: Nếu một số thứ hai

*Xem Ghi chú A, p. 163.

được thêm vào bất kỳ số đã cho nào, kết quả sẽ giống như khi số đã cho đầu tiên được thêm vào số thứ hai.

Ví dụ này cho thấy rằng, nhờ sự trợ giúp của biểu tượng, chúng ta có thể thực hiện các bước chuyển đổi trong suy luận gần như một cách máy móc bằng mắt, điều này nếu không sẽ huy động các khả năng cao hơn của bộ não.

Đó là một sự thật sai lầm sâu sắc, được lặp đi lặp lại bởi tất cả các cuốn sách sao chép và bởi những người nổi tiếng khi họ phát biểu, rằng chúng ta nên nuôi dưỡng thói quen suy nghĩ về những gì chúng ta đang làm. Điều ngược lại chính xác là trường hợp. Nền văn minh tiến bộ bằng cách mở rộng số lượng các hoạt động quan trọng mà chúng ta có thể thực hiện mà không cần suy nghĩ về chúng. Các hoạt động tư tưởng giống như các cuộc tấn công của kỵ binh trong một trận chiến—chúng bị hạn chế nghiêm ngặt về số lượng, chúng cần những con ngựa tươi và chỉ được thực hiện vào những thời điểm quyết định.

Một thuộc tính rất quan trọng mà chủ nghĩa tượng trưng sở hữu là nó phải ngắn gọn, sao cho có thể nhìn thấy chỉ bằng một cái liếc mắt và được viết ra một cách nhanh chóng. Bây giờ chúng ta không thể đặt các ký hiệu lại với nhau một cách chính xác hơn bằng cách đặt chúng ngay cạnh nhau. Do đó, trong một biểu tượng tốt, việc đặt cạnh nhau các biểu tượng quan trọng phải có một ý nghĩa quan trọng. Đây là một trong những giá trị của ký hiệu tiếng Ả Rập cho các con số; bằng mười ký hiệu, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, và bằng cách đặt cạnh nhau đơn giản, nó tượng trưng cho bất kỳ số nào. Một lần nữa trong đại số, khi chúng ta có hai biến số x và y, chúng ta phải đưa ra lựa chọn xem cái gì sẽ được biểu thị bằng cách đặt cạnh nhau của chúng xy. Bây giờ, hai ý tưởng quan trọng nhất có trong tay là phép cộng và phép nhân. Các nhà toán học đã chọn cách làm cho biểu tượng của họ ngắn gọn hơn bằng cách định nghĩa xy đại diện cho $x \times y$. Do đó, các luật (3), (4), và (5) ở trên nói chung được viết như sau:

$$xy = yx, \quad (xy)z = x(yz), \quad x(y+z) = xy + xz,$$

do đó đảm bảo một lợi ích lớn trong sự đồng nhất. Quy tắc tượng trưng tương tự được áp dụng cho việc đặt cạnh nhau của một số xác định và một biến: chúng ta viết $3x$ cho $3 \times x$, và $30x$ cho $30 \times x$.

Rõ ràng là khi thay thế các số xác định cho các biến, cần phải cẩn thận để khôi phục lại $\times$, để không mâu thuẫn với ký hiệu tiếng Ả Rập. Vì vậy, khi chúng ta thay thế 2 cho x và 3 cho y trong xy, chúng ta phải viết 2×3 cho xy, chứ không phải 23 có nghĩa là $20 + 3$.

Thật thú vị khi lưu ý tầm quan trọng của một biểu tượng có vẻ ngoài khiêm tốn đối với sự phát triển của khoa học. Nó có thể đại diện cho sự trình bày rõ ràng của một ý tưởng, thường là một ý tưởng rất tinh tế, và nhờ sự tồn tại của nó giúp bạn dễ dàng thể hiện mối quan hệ của ý tưởng này với tất cả các chuỗi ý tưởng phức tạp mà nó xuất hiện. Ví dụ: lấy ký hiệu khiêm tốn nhất trong tất cả các ký hiệu, cụ thể là, 0, viết tắt của số không *số* . Ký hiệu số La Mã không có ký hiệu cho số không, và có lẽ hầu hết các nhà toán học của thế giới cổ đại sẽ vô cùng bối rối trước ý tưởng về số không. Rốt cuộc, đó là một ý tưởng rất tinh tế, không rõ ràng chút nào. Rất nhiều cuộc thảo luận về ý nghĩa của số không của đại lượng sẽ được tìm thấy trong các tác phẩm triết học. Trên thực tế, số 0 không khó hơn hay tinh tế hơn về mặt ý tưởng so với các số chính khác. Ý chúng tôi là gì khi nói 1 hoặc 2 hoặc 3? Nhưng chúng ta đã quen với việc sử dụng những ý tưởng này, mặc dù hầu hết chúng ta đều bối rối khi đưa ra một phân tích rõ ràng về những ý tưởng đơn giản hơn hình thành nên chúng. Quan điểm về số 0 là chúng ta không cần sử dụng nó trong các hoạt động của cuộc sống hàng ngày. Không ai đi ra ngoài để mua cá không. Theo một cách nào đó, nó là văn minh nhất trong tất cả các hồng y, và việc sử dụng nó chỉ buộc chúng ta phải thực hiện theo nhu cầu của các phương thức tư duy được trau dồi. Nhiều dịch vụ quan trọng được hiển thị bằng biểu tượng 0, viết tắt của số không.

Biểu tượng được phát triển liên quan đến ký hiệu tiếng Ả Rập

cho các số mà nó là một phần thiết yếu. Vì trong ký hiệu đó, giá trị của một chữ số phụ thuộc vào vị trí mà nó xuất hiện. Ví dụ, xem xét chữ số 5, xuất hiện trong các số 25, 51, 3512, 5213. Trong số đầu tiên 5 là năm, trong số thứ hai 5 là năm mươi, trong số thứ ba là năm trăm và trong số thứ tư là năm nghìn. Bây giờ, khi chúng ta viết số 51 ở dạng tượng trưng 51, chữ số 1 đẩy chữ số 5 lên vị trí thứ hai (tính từ phải sang trái) và do đó cho nó giá trị năm mươi. Nhưng khi chúng ta muốn tượng trưng cho chính số năm mươi, chúng ta không thể có chữ số 1 để thực hiện dịch vụ này; chúng tôi muốn một chữ số ở vị trí hàng đơn vị không thêm gì vào tổng số và chưa đẩy 5 lên vị trí thứ hai. Dịch vụ này được thực hiện bởi 0, ký hiệu cho số không. Rất có khả năng những người giới thiệu cho mục đích này không có khái niệm rõ ràng trong đầu về số không. Họ chỉ đơn giản muốn một dấu hiệu tượng trưng cho thực tế là không có gì được đóng góp bởi vị trí của chữ số mà nó xuất hiện. Ý tưởng về số 0 có lẽ hình thành dần dần từ mong muốn đồng hóa ý nghĩa của dấu này với ý nghĩa của các dấu, 1, 2, . . . , 9, vốn đại diện cho các số chính. Đây không phải là trường hợp duy nhất trong đó một ý tưởng tinh tế đã được đưa vào toán học bằng một biểu tượng mà trong nguồn gốc của nó đã được quyết định bởi sự thuận tiện thực tế.

Vì vậy, việc sử dụng đầu tiên của 0 là để làm cho ký hiệu trồng trọt có thể thực hiện được—không có dịch vụ nhỏ nào. Chúng ta có thể tưởng tượng rằng khi nó được giới thiệu cho mục đích này, những người thực tế, thuộc loại không thích những ý tưởng viển vông, đã phản đối thói quen ngớ ngẩn là xác định nó bằng một con số không. Nhưng họ đã sai, vì những người như vậy luôn như vậy khi họ từ bỏ chức năng thích hợp của mình là nghiền nát thức ăn mà người khác đã chuẩn bị. Đối với dịch vụ tiếp theo được thực hiện bởi biểu tượng 0 về cơ bản phụ thuộc vào việc gán cho nó chức năng đại diện cho số không.

Việc sử dụng biểu tượng thứ hai này thoạt nhìn đơn giản đến mức ngớ ngẩn đến nỗi khó có thể khiến một người mới bắt đầu nhận ra tầm quan trọng của nó. Hãy để chúng tôi bắt đầu với một

ví dụ đơn giản. Trong Chương II. chúng tôi đã đề cập đến mối tương quan giữa hai biến số x và y được biểu diễn bằng phương trình $x + y = 1$. Điều này có thể được biểu diễn theo vô số cách; ví dụ: $x = 1 - y$, $y = 1 - x$, $2x + 3y - 1 = x + 2y$, v.v. Nhưng cách quan trọng để nói nó là

$$x + y - 1 = 0.$$

Tương tự, cách quan trọng để viết phương trình $x = 1$ là $x - 1 = 0$ và cách biểu diễn phương trình $3x - 2 = 2x^2$ là $2x^2 - 3x + 2 = 0$. Vấn đề là tất cả các ký hiệu đại diện cho các biến, *ví dụ* x and y, và các ký hiệu đại diện cho một số xác định khác 0, chẳng hạn như 1 hoặc 2 trong các ví dụ ở trên, được viết ở phía bên trái, do đó toàn bộ phía bên trái tương ứng với số không. Người đàn ông đầu tiên làm điều này được cho là Thomas Harriot, sinh ra tại Oxford năm 1560 và mất năm 1621. Nhưng tầm quan trọng của thủ tục tượng trưng đơn giản này là gì? Điều này đã tạo điều kiện cho sự phát triển của quan niệm hiện đại về *dạng đại số*.

Đây là một ý tưởng mà chúng ta sẽ phải liên tục nhắc lại; sẽ không đi quá xa khi nói rằng không phần nào của toán học hiện đại có thể được hiểu một cách đúng đắn nếu không có sự lặp đi lặp lại liên tục về nó. Khái niệm về hình thức quá chung chung nên khó có thể mô tả nó bằng những thuật ngữ trừu tượng. Ở giai đoạn này, chúng ta sẽ làm tốt hơn nếu chỉ xem xét các ví dụ. Do đó, các phương trình $2x - 3 = 0$, $x - 1 = 0$, $5x - 6 = 0$, đều là các phương trình có cùng dạng, cụ thể là các phương trình chứa một ẩn số x, không cấp số nhân của chính nó, sao cho x^2, x^3, v.v., không xuất hiện. Một lần nữa $3x^2 - 2x + 1 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, đều là các phương trình có cùng dạng, cụ thể là , các phương trình liên quan đến một ẩn số x trong đó $x \times x$, tức là x^2, xuất hiện. Các phương trình này được gọi là phương trình bậc hai. Các phương trình bậc ba tương tự, trong đó x^3 xuất hiện, mang lại một dạng khác, v.v. Trong số ba phương trình bậc hai nêu trên, có một sự khác biệt nhỏ giữa phương trình cuối cùng, $x^2 - 4 = 0$, và hai phương trình trước, do thực tế là x (như khác

biệt với x^2) không xuất hiện trong phần cuối và xuất hiện trong hai phần còn lại. Sự khác biệt này rất không quan trọng so với thực tế lớn là chúng đều là phương trình bậc ba.

Sau đó, có các dạng phương trình nêu mối tương quan giữa hai biến; ví dụ: $x + y - 1 = 0, 2x + 3y - 8 = 0$, v.v. Đây là những ví dụ về dạng *tuyến tính* của phương trình. Lý do cho cái tên “tuyến tính” này là vì phương pháp biểu diễn đồ họa, được giải thích ở cuối Chương II., luôn biểu diễn các phương trình như vậy bằng một đường thẳng. Sau đó, có các dạng khác cho hai biến—ví dụ, dạng bậc hai, dạng bậc ba, v.v. Nhưng điểm mà chúng tôi nhấn mạnh ở đây là nghiên cứu về dạng này được tạo điều kiện thuận lợi, và thực sự là có thể thực hiện được, bằng phương pháp viết phương trình tiêu chuẩn với ký hiệu 0 ở vế phải.

Vẫn còn một chức năng khác được thực hiện bởi 0 liên quan đến việc nghiên cứu hình thức. Bất kể x có thể là số nào, $0 \times x = 0$ và $x + 0 = x$. Bằng những đặc tính này, những khác biệt nhỏ về hình thức có thể được đồng hóa. Do đó, sự khác biệt được đề cập ở trên giữa các phương trình bậc hai $x^2 - 3x + 2 = 0$ và $x^2 - 4 = 0$, có thể bị xóa bằng cách viết phương trình sau trong dạng $x^2 + (0 \times x) - 4 = 0$. Vì, theo các luật nêu trên, $x^2 + (0 \times x) - 4 = x^2 + 0 - 4 = x^2 - 4$. Do đó, phương trình $x^2 - 4 = 0$ chỉ đơn thuần là đại diện cho một loại phương trình bậc hai cụ thể và thuộc cùng một dạng tổng quát như $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Vì ba lý do này, ký hiệu 0, đại diện cho số 0, rất cần thiết cho toán học hiện đại. Nó đã tạo ra các loại điều tra có thể thực hiện được nếu không có nó.

Biểu tượng của toán học trên thực tế là kết quả của những ý tưởng chung thống trị khoa học. Bây giờ chúng ta có hai ý tưởng chung như vậy trước mắt, ý tưởng về biến số và ý tưởng về dạng đại số. Sự kết hợp của những khái niệm này đã áp đặt lên toán học một loại ký hiệu khác gần như kỳ lạ về đặc tính của nó, nhưng không kém phần hiệu quả. Chúng ta đã thấy rằng một phương trình bao gồm hai biến, x và y, thể hiện mối tương quan cụ thể giữa cặp biến. Do đó, $x + y - 1 = 0$ biểu thị một mối tương

quan xác định và $3x + 2y - 5 = 0$ biểu thị một mối tương quan xác định khác giữa các biến x và y; và cả hai mối tương quan đều có dạng mà chúng ta gọi là tương quan tuyến tính. Nhưng bây giờ, làm thế nào chúng ta có thể biểu diễn tương quan tuyến tính *bất kỳ* giữa các biến số x và y? Ở đây chúng tôi muốn tượng trưng *bất kỳ* tương quan tuyến tính; giống như x tượng trưng cho số *bất kỳ* . Điều này được thực hiện bằng cách biến các số xuất hiện trong mối tương quan xác định $3x + 2y - 5 = 0$ thành các chữ cái. Chúng tôi nhận được $ax + by - c = 0$. Ở đây a, b, c, đại diện cho các số biến giống như x và y: nhưng có sự khác biệt trong việc sử dụng hai bộ biến. Chúng tôi nghiên cứu các thuộc tính chung của mối quan hệ giữa x và y trong khi a, b và c có giá trị không thay đổi. Chúng tôi không xác định giá trị của a, b, và c là gì; nhưng bất kể chúng là gì, chúng vẫn cố định trong khi chúng ta nghiên cứu mối quan hệ giữa các biến x và y cho toàn bộ nhóm các giá trị có thể có của x và y. Nhưng khi chúng tôi có được các thuộc tính của mối tương quan này, chúng tôi lưu ý rằng, vì a, b, và c chưa được xác định trên thực tế, nên chúng tôi đã chứng minh các thuộc tính phải thuộc về *bất kỳ* quan hệ như vậy. Do đó, bằng cách thay đổi a, b và c, chúng tôi đi đến ý tưởng rằng $ax + by - c = 0$ biểu thị mối tương quan tuyến tính có thể thay đổi giữa x và y. So với x và y, ba biến a, b và c được gọi là các hằng số. Các biến được sử dụng theo cách này đôi khi còn được gọi là tham số.

Giờ đây, các nhà toán học có thói quen đỡ phải giải thích biến nào trong số các biến của họ được coi là "hằng số" và biến nào là biến, được coi là tương quan trong các phương trình của họ, bằng cách sử dụng các chữ cái ở cuối bảng chữ cái cho "biến " biến và các chữ cái ở đầu bảng chữ cái cho biến hoặc tham số "hằng số". Hai hệ thống gặp nhau một cách tự nhiên ở giữa bảng chữ cái. Đôi khi một hoặc hai lời giải thích là cần thiết; nhưng trên thực tế, thông lệ và lẽ thường thường là đủ, và đáng ngạc nhiên là ít có sự nhầm lẫn xảy ra do một thủ tục có vẻ quá lỏng lẻo.

Kết quả của việc loại bỏ liên tục các số xác định bằng các lớp

tham số liên tiếp là số lượng phép tính được thực hiện bởi các nhà toán học là vô cùng nhỏ. Nhiều nhà toán học không thích tất cả các tính toán số và không đặc biệt thành thạo về nó. Lãnh thổ của số học kết thúc khi hai ý tưởng về "biến số" và "dạng đại số" bắt đầu ảnh hưởng.

CHƯƠNG VI

KHÁI QUÁT VỀ SỐ

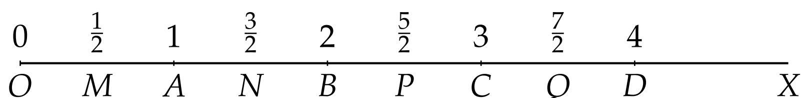
MỘT điểm đặc biệt lớn của toán học là tập hợp các ý tưởng đồng minh đã được phát minh ra liên quan đến các số nguyên mà từ đó chúng ta bắt đầu. Những ý tưởng này có thể được gọi là phần mở rộng hoặc khái quát hóa của số. Ở nơi đầu tiên có ý tưởng về phân số. Chuyên luận sớm nhất về số học mà chúng tôi sở hữu được viết bởi một linh mục người Ai Cập, tên là Ahmes, trong khoảng thời gian từ 1700 TCN đến 1100 TCN, và nó có thể là bản sao của một tác phẩm cũ hơn nhiều. Nó liên quan chủ yếu đến các tính chất của phân số. Do đó, có vẻ như khái niệm này đã được phát triển từ rất sớm trong lịch sử toán học. Thật vậy, chủ đề là một chủ đề rất rõ ràng. Để chia một cánh đồng thành ba phần bằng nhau và lấy hai trong số các phần đó, hẳn là một kiểu thao tác thường xảy ra. Theo đó, chúng ta không cần ngạc nhiên rằng con người của các nền văn minh xa xôi đã quen thuộc với ý tưởng về hai phần ba, và với các quan niệm đồng minh. Vì vậy, là khái quát hóa đầu tiên của số, chúng tôi đặt khái niệm về phân số. Người Hy Lạp nghĩ về chủ đề này dưới dạng tỷ lệ, do đó người Hy Lạp sẽ tự nhiên nói rằng một đường thẳng dài hai foot có tỷ lệ với một đường dài ba foot là 2 to 3. Dưới ảnh hưởng của ký hiệu đại số, chúng ta thường nói rằng một dòng này dài bằng 2/3 dòng kia và sẽ coi 2/3 là một cấp số nhân.

Liên quan đến lý thuyết tỷ lệ, hay phân số , người Hy Lạp đã có một khám phá vĩ đại, là cơ hội cho một lượng lớn tư tưởng triết học cũng như toán học. Họ phát hiện ra sự tồn tại của các tỷ lệ “không thể so sánh được”. Trên thực tế, trong quá trình nghiên cứu hình học, họ đã chứng minh rằng, bắt đầu với một đoạn thẳng có độ dài bất kỳ, phải tồn tại những đoạn thẳng khác có độ dài không bằng độ dài ban đầu theo tỷ lệ của bất kỳ cặp số nguyên nào - hay nói cách khác từ, tồn tại độ dài không phải là bất kỳ phần chính xác nào của độ dài ban đầu.

Ví dụ, đường chéo của một hình vuông không thể được biểu thị bằng bất kỳ phân số nào của cạnh của cùng một hình vuông; trong ký hiệu hiện đại của chúng tôi, độ dài của đường chéo bằng $\sqrt{2}$ nhân với độ dài của cạnh. Nhưng không có phân số nào đại diện chính xác cho $\sqrt{2}$. Chúng tôi có thể xấp xỉ thành $\sqrt{2}$ gần như mong muốn, nhưng chúng tôi không bao giờ đạt được chính xác giá trị của nó. Ví dụ: $\frac{49}{25}$ nhỏ hơn 2 và $\frac{9}{4}$ lớn hơn 2, do đó $\sqrt{2}$ nằm giữa $\frac{7}{5}$ và $\frac{3}{2}$. Nhưng cách có hệ thống tốt nhất để xấp xỉ $\sqrt{2}$ để thu được một loạt phân số thập phân, mỗi phân số lớn hơn phân số cuối cùng, là bằng phương pháp trích căn bậc hai thông thường; do đó, chuỗi này là 1, $\frac{14}{10}$, $\frac{141}{100}$, $\frac{1414}{1000}$, v.v.

Những tỷ lệ thuộc loại này được người Hy Lạp gọi là không thể so sánh được. Từ thời Hy Lạp trở đi, chúng đã kích thích rất nhiều cuộc thảo luận triết học, và những khó khăn liên quan đến chúng chỉ mới được giải quyết gần đây.

Chúng ta sẽ đặt các tỷ lệ không thể so sánh được với các phân số và coi toàn bộ tập hợp các số nguyên, phân số và số không thể so sánh là tạo thành một lớp số mà chúng ta sẽ gọi là "số thực". Chúng ta luôn nghĩ về các số thực được sắp xếp theo thứ tự độ lớn, bắt đầu từ 0 và đi lên, và trở nên lớn hơn và lớn hơn vô tận khi chúng ta tiếp tục. Các số thực được biểu diễn thuận tiện bằng các điểm trên một đường thẳng. Gọi OX là bất kỳ đường thẳng



nào bị chặn tại O và kéo dài vô tận theo hướng OX. Lấy bất kỳ điểm thuận tiện nào, A, trên đó, sao cho OA biểu thị độ dài đơn vị; và chia các độ dài AB, BC, CD, v.v., mỗi độ dài bằng OA. Sau đó, điểm O đại diện cho số 0, A số 1, B số 2, v.v. Trên thực tế, số được biểu thị bởi bất kỳ điểm nào là thước đo khoảng cách của nó từ O, theo đơn vị độ dài OA. Các điểm giữa O và A đại diện

cho các phân số thích hợp và các số không thể so sánh nhỏ hơn 1; điểm giữa của OA đại diện cho $\dfrac{1}{2}$, của AB đại diện cho $\dfrac{3}{2}$, của BC đại diện cho $dfrac52$, v.v. Theo cách này, mọi điểm trên OX đại diện cho một số thực nào đó và mọi số thực được biểu thị bằng một điểm nào đó trên OX.

Chuỗi (hoặc hàng) điểm dọc theo OX, bắt đầu từ O và di chuyển đều đặn theo hướng từ O đến X, biểu thị các số thực như được sắp xếp trong thứ tự kích thước tăng dần , bắt đầu từ 0 và liên tục tăng khi chúng tôi tiếp tục.

Tất cả điều này có vẻ đủ đơn giản, nhưng ngay cả ở giai đoạn này, vẫn có một số ý tưởng thú vị có thể đạt được bằng cách dựa trên những sự thật hiển nhiên này. Xét chuỗi các điểm chỉ biểu diễn các số nguyên, cụ thể là các điểm, O, A, B, C, D, etc. Ở đây có một điểm đầu tiên O, một điểm tiếp theo xác định, A, và mỗi điểm, chẳng hạn như A hoặc B, có một điểm liền trước xác định và một điểm kế ngay xác định, ngoại trừ of O, không có tiền thân; cũng là bộ phim tiếp tục vô tận mà không có kết thúc. Loại thứ tự này được gọi là loại thứ tự của các số nguyên; bản chất của nó là sự sở hữu của những người hàng xóm kế cận ở hai bên ngoại trừ số 1 trong hàng. Một lần nữa xem xét các số nguyên và phân số cùng nhau, bỏ qua các điểm tương ứng với các tỷ lệ không thể so sánh được. Loại thứ tự sê-ri mà chúng ta có được bây giờ là hoàn toàn khác. Có một số hạng đầu tiên O; nhưng không có nhiệm kỳ nào có người tiền nhiệm hoặc người kế nhiệm ngay lập tức. Điều này dễ dàng nhận thấy trong trường hợp giữa hai phân số bất kỳ ta luôn có thể tìm được một phân số khác có giá trị trung gian. Một cách rất đơn giản để làm điều này là cộng các phân số lại với nhau và chia đôi kết quả. Ví dụ: giữa $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$, phân số $\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\frac{3}{4})$, tức là $\frac{17}{24}$, nói dối; và giữa $\frac{2}{3}$ và $\frac{17}{24}$ phân số $\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\frac{17}{24})$, tức là $\frac{33}{48}$, nói dối; và như vậy vô thời hạn. Do thuộc tính này, chuỗi được cho là "nhỏ gọn." Không có điểm kết thúc cho chuỗi, chuỗi này tăng vô tận không giới hạn khi chúng ta đi dọc theo đường thẳng OX. Thoạt nhìn, có vẻ như loại chuỗi số có được theo cách này từ các phân số, luôn bao gồm các số nguyên, sẽ giống với loại có được

từ tất cả các số thực, số nguyên, phân số và hỗn hợp gộp lại, nghĩa là, từ tất cả các điểm trên đường thẳng OX. Tất cả những gì chúng ta đã nói cho đến nay về chuỗi phân số đều áp dụng tốt cho chuỗi tất cả các số thực. Nhưng có những khác biệt quan trọng mà bây giờ chúng tôi tiến hành phát triển. Sự vắng mặt của những điều không thể so sánh được trong chuỗi các phân số dẫn đến sự vắng mặt của các điểm cuối đối với một số lớp nhất định. Do đó, hãy xem xét $\sqrt{2}$ không thể so sánh được. Trong dãy số thực, số này đứng giữa tất cả các số có bình phương nhỏ hơn 2 và tất cả các số có bình phương lớn hơn 2. Nhưng chỉ tính đến chuỗi phân số và không nghĩ đến những cái không thể so sánh được, vì vậy chúng ta không thể đưa vào $\sqrt{2}$, không có phân số nào có đặc tính chia chuỗi thành hai phần theo cách này, tức là sao cho tất cả các phần tử ở một bên có bình phương nhỏ hơn 2, và ở bên kia lớn hơn 2. Do đó, trong chuỗi phân số , có một khoảng cách gần đúng mà $\sqrt{2}$ phải xuất hiện. Sự hiện diện của các khoảng cách gần đúng trong chuỗi phân số có vẻ như là một vấn đề nhỏ; nhưng bất kỳ nhà toán học nào tình cờ đọc được điều này đều biết rằng khả năng không có giới hạn hoặc cực đại đối với một lớp số, nhưng không trải rộng trên toàn bộ dãy số, là một điều ác không nhỏ. Để tránh khó khăn này, người ta phải viện đến những điều không thể so sánh được, để có được một chuỗi hoàn chỉnh không có khoảng trống.

Có một sự khác biệt thậm chí còn cơ bản hơn giữa hai bộ truyện. Chúng ta có thể sắp xếp lại các phân số trong một chuỗi giống như dãy số nguyên, nghĩa là với số hạng đầu tiên và sao cho mỗi số hạng có một số hạng liền sau và (ngoại trừ số hạng đầu tiên) một số liền trước. Chúng tôi có thể chỉ ra làm thế nào điều này có thể được thực hiện. Để mọi số hạng trong dãy phân số và số nguyên được viết dưới dạng phân số bằng cách viết $\frac{1}{1}$ cho 1, $\frac{2}{1}$ cho 2, v.v. bật cho tất cả các số nguyên, ngoại trừ 0. Ngoài ra, tại thời điểm này, chúng tôi sẽ coi các phân số có giá trị bằng nhau nhưng không bị giảm xuống các số hạng thấp nhất của chúng là khác biệt; để, ví dụ, cho đến khi có thông báo mới

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, v.v., đều được coi là khác biệt. Bây giờ hãy nhóm các phân số thành các lớp bằng cách cộng tử số và mẫu số của mỗi số hạng lại với nhau. Để cho ngắn gọn, hãy gọi tổng của tử số và mẫu số của một phân số là chỉ số của nó. Do đó, 7 là chỉ số của $\frac{4}{3}$, cũng như của $\frac{3}{4}$ và của $\frac{2}{5}$. Hãy để các phân số trong mỗi lớp là tất cả các phân số có một số chỉ số cụ thể, do đó cũng có thể được gọi là chỉ số lớp. Bây giờ hãy sắp xếp các lớp này theo thứ tự độ lớn của các chỉ số của chúng. Lớp đầu tiên có chỉ mục 2 và thành viên duy nhất của nó là $\frac{1}{1}$; lớp thứ hai có chỉ mục 3 và các thành viên của nó là $\frac{1}{2}$ và $\frac{2}{1}$; lớp thứ ba có chỉ số 4 và các thành viên của nó là $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$; lớp thứ tư có chỉ số 5 và các thành viên của nó là $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $frac41$; và như thế. Dễ dàng nhận thấy rằng số phần tử (bao gồm cả các phân số không ở dạng thấp nhất) của bất kỳ lớp nào đều nhỏ hơn chỉ số của nó. Ngoài ra, các phần tử của bất kỳ một lớp nào cũng có thể được sắp xếp theo thứ tự bằng cách lấy phần tử đầu tiên là phân số có tử số 1, phần tử thứ hai có tử số 2, v.v., cho đến $(n-1)$ trong đó n là chỉ mục. Do đó, đối với lớp chỉ mục n, các thành viên xuất hiện theo thứ tự

$$\frac{1}{n-1}, \quad \frac{2}{n-2}, \quad \frac{3}{n-3}, \ldots, \quad \frac{n-1}{1}.$$

Các thành viên của bốn lớp đầu tiên trên thực tế đã được đề cập theo thứ tự này. Do đó, toàn bộ tập hợp các phân số hiện đã được sắp xếp theo thứ tự giống như thứ tự của các số nguyên. Nó chạy như vậy

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \left[\frac{2}{2}\right], \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots,$$
$$\frac{n-1}{1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{1}, \frac{1}{n},$$

và như thế.

Giờ đây, chúng ta có thể loại bỏ tất cả các lần lặp lại của các phân số có cùng giá trị bằng cách đơn giản gạch bỏ chúng bất cứ khi nào chúng xuất hiện sau lần xuất hiện đầu tiên. Trong một số thuật ngữ ban đầu được viết ở trên, $\frac{2}{2}$ được đặt trong dấu ngoặc

vuông ở trên là phân số duy nhất không ở dạng thấp nhất. Nó đã xảy ra trước đây với as $\frac{1}{1}$. Vì vậy, điều này phải được loại bỏ. Nhưng dãy vẫn còn lại các tính chất giống nhau, cụ thể là (a) có số hạng đầu tiên, (b) mỗi số hạng có các hàng xóm bên cạnh, (c) bộ phim tiếp tục không có hồi kết.

Có thể chứng minh rằng không thể sắp xếp toàn bộ dãy số thực theo cách này. Sự thật kỳ lạ này được phát hiện bởi Georg Cantor, một nhà toán học người Đức vẫn còn sống; nó có tầm quan trọng hàng đầu trong triết lý của các ý tưởng toán học. Trên thực tế, chúng ta đang chạm tới phần rìa của những vấn đề lớn về ý nghĩa của tính liên tục và tính vô hạn.

Một phần mở rộng khác của số xuất phát từ việc đưa ra ý tưởng về những gì đã được đặt tên khác nhau cho một thao tác hoặc một bước, các tên tương ứng phù hợp theo các quan điểm hơi khác nhau. Chúng ta sẽ bắt đầu với một trường hợp cụ thể. Xét câu lệnh $2 + 3 = 5$. Chúng tôi thêm 3 vào 2 và nhận được 5. Hãy nghĩ về hoạt động thêm 3: hãy để điều này được biểu thị bằng $+3$. Một lần nữa $4 - 3 = 1$. Hãy nghĩ về hoạt động của phép trừ 3: hãy để điều này được biểu thị bằng -3. Do đó, thay vì xem xét bản thân các số thực, chúng ta xem xét *các phép toán* cộng hoặc trừ chúng: thay vì $\sqrt{2}$, chúng ta xem xét $+\sqrt{2}$ và $-sqrt2$, cụ thể là các thao tác cộng $\sqrt{2}$ và trừ $\sqrt{2}$. Sau đó, chúng ta có thể cộng các phép toán này, tất nhiên là theo một nghĩa cộng khác với nghĩa mà chúng ta cộng các số. Tổng của hai phép toán là phép toán đơn lẻ có tác dụng giống như hai phép toán được áp dụng liên tiếp. Hai thao tác được áp dụng theo thứ tự nào? Câu trả lời là nó thờ ơ, vì ví dụ

$$2 + 3 + 1 = 2 + 1 + 3;$$

sao cho phép cộng các bước $+3$ và $+1$ có tính chất giao hoán.

Các nhà toán học có một thói quen, gây bối rối cho những người tham gia tìm kiếm ý nghĩa, nhưng lại rất thuận tiện trong thực tế, đó là sử dụng cùng một biểu tượng theo các nghĩa khác nhau mặc dù có liên quan. Điều kiện thiết yếu duy nhất đối với

một biểu tượng trong mắt họ là, bất kể ý nghĩa của nó có thể khác nhau như thế nào, thì các quy luật hình thức cho việc sử dụng nó sẽ luôn giống nhau. Trong theo thói quen này, phép cộng các phép toán được biểu thị bằng $+$ cũng như phép cộng các số. Theo đó chúng ta có thể viết

$$(+3) + (+1) = +4;$$

trong đó phần giữa $+$ ở phía bên trái biểu thị phần bổ sung của các phép toán $+3$ và $+1$. Nhưng, hơn nữa, chúng ta không cần quá khoa trương trong biểu tượng của mình, ngoại trừ trong những trường hợp hiếm hoi khi chúng ta trực tiếp truy tìm ý nghĩa; do đó, chúng tôi luôn bỏ $+$ đầu tiên của một dòng và các dấu ngoặc, và không bao giờ viết hai dấu $+$ chạy liền. Vậy phương trình trên trở thành

$$3 + 1 = 4,$$

mà chúng tôi hiểu là phép cộng số đơn giản hoặc là phép cộng phức tạp hơn của các phép toán được thể hiện đầy đủ theo cách viết phương trình trước đây hoặc cuối cùng là biểu thị kết quả của việc áp dụng phép toán $+1$ cho số 3 và nhận được số 4. Bất kỳ giải thích nào có thể luôn đúng. Nhưng cách giải thích duy nhất luôn có thể thực hiện được, trong những điều kiện nhất định, là cách giải thích về hoạt động. Các giải thích khác thường cho kết quả vô nghĩa.

Điều này ngay lập tức dẫn chúng ta đến một câu hỏi, câu hỏi chắc hẳn đã thường xuyên nảy sinh trong tâm trí người đọc : Tất cả những điều được trình bày tỉ mỉ này có ích lợi gì? Tại thời điểm này, người bạn của chúng ta, một người thực tế, chắc chắn sẽ bước vào và khăng khăng quét sạch tất cả những mạng nhện ngớ ngẩn này trong não. Câu trả lời là cái mà nhà toán học đang tìm kiếm là Tính tổng quát. Đây là một ý tưởng xứng đáng được đặt bên cạnh các khái niệm về Biến và Dạng cho đến nay liên quan đến về tầm quan trọng của nó trong việc điều chỉnh quy trình toán học. Bất kỳ giới hạn nào đối với tính tổng quát của các

định lý, hoặc bằng chứng, hoặc diễn giải đều ghê tởm đối với bản năng toán học. Ba khái niệm này, về biến số, về hình thức và về tính tổng quát, tạo thành một loại bộ ba toán học chi phối toàn bộ chủ đề. Tất cả chúng thực sự bắt nguồn từ cùng một gốc, cụ thể là từ bản chất trừu tượng của khoa học.

Chúng ta hãy xem tính tổng quát đạt được như thế nào khi đưa ra ý tưởng về các phép toán này. Lấy phương trình $x + 1 = 3$; giải pháp là $x = 2$. Ở đây chúng ta có thể diễn giải các biểu tượng của mình như những con số đơn thuần, và việc viện đến "các phép toán" là hoàn toàn không cần thiết. Nhưng, nếu x chỉ là một con số, phương trình $x + 3 = 1$ là vô nghĩa. Vì x phải là số thứ còn lại sau khi bạn đã lấy 3 thứ khỏi 1 thứ; và không có thủ tục như vậy là có thể. Tại thời điểm này, ý tưởng của chúng ta về dạng đại số bước vào, bản thân nó chỉ là sự khái quát hóa dưới một khía cạnh khác. Do đó, chúng ta xem xét phương trình tổng quát có cùng dạng với $x + 1 = 3$. Phương trình này là $x + a = b$, và nghiệm của nó là $x = b - a$. Ở đây những khó khăn của chúng tôi trở nên gay gắt; vì biểu mẫu này chỉ có thể được sử dụng để diễn giải bằng số miễn là b lớn hơn a, và chúng ta không thể nói mà không có bằng chứng rằng a và b có thể là các hằng số bất kỳ. Nói cách khác, chúng tôi đã đưa ra một giới hạn về tính biến thiên của "hằng số" a và b, mà chúng tôi phải kéo như một sợi dây chuyền trong suốt tất cả các lập luận của mình. Các nghiên cứu toán học thực sự kéo dài sẽ không thể thực hiện được trong những điều kiện như vậy. Mọi phương trình cuối cùng sẽ bị chôn vùi dưới hàng đống giới hạn. Nhưng nếu bây giờ chúng ta giải thích các biểu tượng của mình là "các phép toán", thì mọi giới hạn sẽ biến mất như phép thuật. Phương trình $x + 1 = 3$ cho $x = +2$, phương trình $x + 3 = 1$ cho $x = -2$, phương trình $x + a = b$ cho $x = b - a$ là phép toán cộng hoặc trừ tùy từng trường hợp. Chúng ta không bao giờ cần phải quyết định liệu $b - a$ đại diện cho hoạt động cộng hay trừ, vì các quy tắc của thủ tục với các ký hiệu đều giống nhau trong cả hai trường hợp.

Việc viết một chương chi tiết về đại số sơ cấp không nằm trong

kế hoạch của tác phẩm này. Mục tiêu của chúng tôi chỉ đơn thuần là làm rõ những ý tưởng cơ bản hướng dẫn sự hình thành của khoa học. Theo đó, chúng tôi không giải thích thêm các quy tắc chi tiết theo đó "số dương và số âm" được nhân và kết hợp theo cách khác. Chúng tôi đã giải thích ở trên rằng số dương và số âm là các phép toán. Chúng còn được gọi là "các bước" Vì vậy, $+3$ là bước mà chúng ta đi từ 2 đến 5 và -3 là bước lùi mà chúng ta đi từ 5 đến 2. Xét đường thẳng OX được chia theo cách đã giải thích ở phần trước của chương, sao cho các điểm của nó biểu thị các số. Khi đó $+2$ là bước từ O đến B hoặc từ A đến C hoặc (nếu

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & -3 & -2 & -1 & & +1 & +2 & +3 & & & \\ X' & D' & C' & B' & A' & O & A & B & C & D & E & X \end{array}$$

các phép chia được thực hiện ngược dọc theo OX') từ C' đến A', hoặc từ D' đến B', v.v. Tương tự -2 là bước từ O đến B' hoặc từ B' đến D' hoặc từ B đến O hoặc từ C đến A.

Chúng tôi có thể coi điểm đạt được bằng một bước từ O, là đại diện cho bước đó. Do đó, A đại diện cho $+1$, B đại diện cho $+2$, A' đại diện cho -1, B' đại diện cho -2, v.v. . Cần lưu ý rằng, trong khi trước đây chỉ với các số thực "không dấu", các điểm ở một phía của chỉ O, cụ thể là dọc theo OX, là đại diện cho các số, giờ đây với các bước mỗi điểm trên toàn bộ đường kéo dài ở cả hai phía của O là đại diện cho một bước. Đây là một biểu diễn bằng hình ảnh về tính tổng quát vượt trội được giới thiệu bởi các số dương và số âm, cụ thể là các bước hoặc thao tác. Các số "có dấu" này cũng là những trường hợp cụ thể của cái được gọi là vectơ (từ tiếng Latin *veho*, I vẽ hoặc mang). Vì chúng ta có thể nghĩ về một hạt được mang từ O đến A, hoặc từ A đến B.

Khi gợi ý cách đây vài trang rằng người thực tế sẽ phản đối sự tế nhị liên quan đến việc giới thiệu các số dương và số âm, chúng tôi đã bôi nhọ cá nhân xuất sắc đó. Vì sự thật là chúng ta đang ở trong bối cảnh của một trong những chiến thắng vĩ đại nhất của anh ấy. Nếu sự thật phải được thú nhận, thì chính con người

thực tế là người đầu tiên sử dụng các ký hiệu thực tế $+$ và $-$. Nguồn gốc của chúng không chắc chắn lắm, nhưng có vẻ như rất có thể chúng phát sinh từ những ký hiệu được đánh phấn trên các rương hàng hóa trong các nhà kho của Đức, để biểu thị lượng thừa hoặc thiếu do một trọng lượng tiêu chuẩn nào đó. Thông báo sớm nhất về chúng xuất hiện trong một cuốn sách xuất bản tại Leipzig, vào năm SCN 1489. Chúng dường như lần đầu tiên được sử dụng trong toán học bởi một nhà toán học người Đức, Stifel, trong cuốn sách xuất bản tại Nuremburg năm 1544 SCN. Nhưng chỉ gần đây người Đức mới được coi là một quốc gia thực dụng. Có một câu chuyện cũ gán để chế biển cho người Anh, đất đai cho người Pháp và những đám mây cho người Đức. Chắc chắn là từ đám mây mà người Đức đã lấy được $+$ và $-$; những ý tưởng mà những biểu tượng này đã tạo ra là quá quan trọng đối với phúc lợi của nhân loại đến từ biển hoặc từ đất liền.

Khả năng ứng dụng của các số dương và số âm là rất rõ ràng. Nếu độ dài theo một hướng được biểu thị bằng số dương, thì độ dài theo hướng ngược lại được biểu thị bằng số âm. Nếu vận tốc theo một hướng là dương thì theo hướng ngược lại là âm. Nếu một vòng quay quanh mặt số theo hướng ngược lại với kim đồng hồ (ngược chiều kim đồng hồ) là dương, thì theo chiều kim đồng hồ là âm. Nếu số dư tại ngân hàng là dương thì khoản thấu chi là âm. Nếu điện khí hóa thủy tinh là dương, thì điện khí hóa nhựa là âm. Thật vậy, trong trường hợp sau này, thuật ngữ điện khí hóa dương và điện khí hóa âm, được coi như những cái tên đơn thuần, trên thực tế đã loại bỏ các thuật ngữ khác. Có thể đưa ra vô số ví dụ. Ý tưởng về số dương và số âm trên thực tế là ý tưởng thành công nhất của sự tinh tế trong toán học.

CHƯƠNG VII

SỐ ẢO

NẾU các ý tưởng toán học được đề cập trong chương trước là một thành công phổ biến, thì những ý tưởng trong chương hiện tại cũng thu hút gần như nhiều sự chú ý chung. Nhưng thành công của họ mang một đặc điểm khác, đó là điều mà người Pháp gọi là *succès de scandale*. Không chỉ người thực tế, mà cả những người có văn học và triết gia đã bày tỏ sự bối rối của họ trước sự tận tâm của các nhà toán học đối với các thực thể bí ẩn mà ngay từ cái tên của họ đã được thừa nhận là tưởng tượng. Tại thời điểm này, có thể hữu ích khi quan sát rằng một loại trí tuệ nhất định luôn khiến chính họ và những người khác lo lắng bằng cách thảo luận về khả năng áp dụng các thuật ngữ kỹ thuật. Những con số không thể so sánh được có được gọi đúng là những con số không? Số dương và số âm có thực sự là số không? Các số ảo có phải là số ảo không, và chúng có phải là số không?—là những loại câu hỏi vô ích như vậy. Bây giờ, không thể hiểu quá rõ ràng rằng, trong khoa học, các thuật ngữ kỹ thuật là những cái tên được đặt một cách tùy tiện, như tên Christian cho trẻ em. Không thể có câu hỏi về những cái tên đúng hay sai. Họ có thể thận trọng hoặc khôn ngoan; vì đôi khi chúng có thể được sắp xếp sao cho dễ nhớ, hoặc để gợi ý những ý tưởng quan trọng và có liên quan. Nhưng nguyên tắc thiết yếu liên quan đã được Humpty Dumpty trình bày khá rõ ràng trong Xứ sở thần tiên cho Alice, khi anh ấy nói với cô ấy, à đề xuất về cách sử dụng từ ngữ của anh ấy, “Tôi trả thêm tiền cho họ và làm cho họ có nghĩa là gì tôi thích.” Vì vậy, chúng tôi sẽ không bận tâm liệu các số ảo có phải là số ảo hay không, hay liệu chúng có phải là số hay không, mà sẽ coi cụm từ này là tên tùy ý của một ý tưởng toán học nhất định, mà bây giờ chúng ta sẽ cố gắng làm rõ.

Nguồn gốc của khái niệm về mọi mặt tương tự như nguồn gốc của các số dương và số âm. Cũng chính xác như vậy, nó là do ba

ý tưởng toán học vĩ đại về biến số, dạng đại số và khái quát hóa. Các số dương và số âm phát sinh từ việc xem xét các phương trình như $x + 1 = 3$, $x + 3 = 1$ và dạng tổng quát $x + a = b$. Tương tự, nguồn gốc của các số ảo là do các phương trình như $x^2 + 1 = 3$, $x^2 + 3 = 1$ và $x^2 + a = b$. Chính xác quá trình tương tự đã được trải qua. Phương trình $x^2 + 1 = 3$ trở thành $x^2 = 2$ và phương trình này có hai nghiệm, hoặc $x = +\sqrt{2}$ hoặc $x = -\sqrt{2}$. Tuyên bố rằng có các giải pháp thay thế này thường được viết $x = \sqrt{2}$. Cho đến nay tất cả đều thuận buồm xuôi gió, giống như trong trường hợp trước. Nhưng bây giờ một khó khăn tương tự phát sinh. Đối với phương trình $x^2 + 3 = 1$ cho $x^2 = -2$ và không có số dương hay số âm nào mà khi nhân với chính nó sẽ cho bình phương âm. Do đó, nếu các ký hiệu của chúng ta có nghĩa là các số dương hoặc số âm thông thường, thì không có nghiệm nào cho $x^2 = -2$, và phương trình trên thực tế là vô nghĩa. Do đó, cuối cùng ở dạng tổng quát $x^2 + a = b$, chúng ta tìm được cặp nghiệm $x = \sqrt{(b-a)}$, khi và chỉ khi, b không ít hơn a. Theo đó, chúng ta không thể nói một cách không giới hạn rằng “hằng số” a and b có thể là bất kỳ số nào, nghĩa là, “hằng số” a and b không phải như chúng phải là, “biến số” độc lập không hạn chế; và do đó, một loạt các hạn chế và hạn chế sẽ tích tụ xung quanh công việc của chúng tôi khi chúng tôi tiến hành.

Do đó, nhiệm vụ tương tự như trước đây đang chờ đợi chúng ta: chúng ta phải đưa ra một cách giải thích mới cho các ký hiệu của mình, sao cho các nghiệm $\pm\sqrt{(b-a)}$ cho phương trình $x^2 + a = b$ luôn có ý nghĩa. Nói cách khác, chúng tôi yêu cầu giải thích các ký hiệu sao cho $\sqrt{a}$ luôn có ý nghĩa cho dù a dương hay âm. Tất nhiên, việc giải thích phải sao cho tất cả các định luật hình thức thông thường về cộng, trừ, nhân và chia đều đúng; và nó cũng không được can thiệp vào tính tổng quát mà chúng tôi đã đạt được bằng cách sử dụng các số dương và số âm. Trên thực tế, theo một nghĩa nào đó, nó phải bao gồm chúng như những trường hợp đặc biệt. Khi a là số âm, chúng ta có thể viết $-c^2$ cho

nó, để c^2 là số dương. sau đó

$$\sqrt{a} = \sqrt{(-c^2)} = \sqrt{\{(-1) \times c^2\}}$$
$$= \sqrt{(-1)}\sqrt{c^2} = c\sqrt{(-1)}.$$

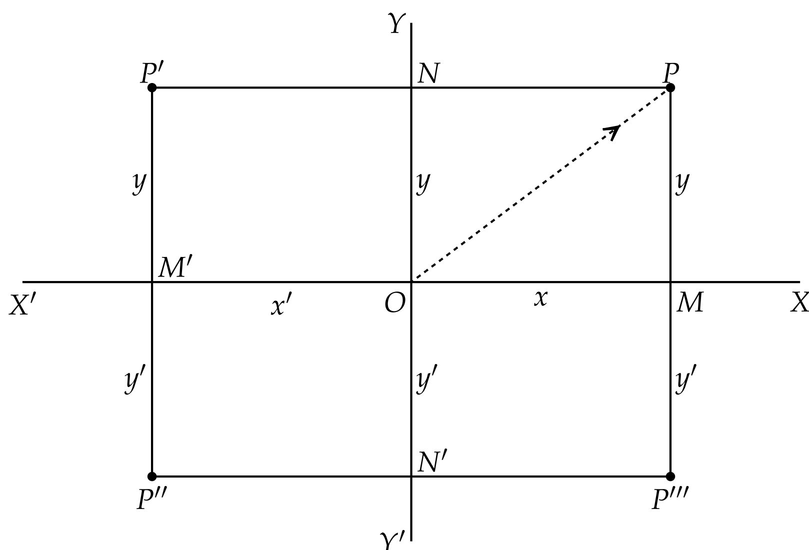
Do đó, nếu chúng ta có thể diễn giải các biểu tượng của mình sao cho $\sqrt{(-1)}$ có ý nghĩa, thì chúng ta đã đạt được đối tượng của mình. Do đó, $\sqrt{(-1)}$ đã được coi là đứng đầu và đi đầu trong tất cả các đại lượng ảo.

Công việc tìm cách diễn giải cho $\sqrt{(-1)}$ là công việc khó khăn hơn nhiều so với công việc tương tự là thông dịch -1. Trên thực tế, trong khi vấn đề dễ hơn được giải quyết gần như theo bản năng ngay khi nó nảy sinh, thì ban đầu, ngay cả với những nhà toán học vĩ đại nhất, hầu như không xảy ra rằng ở đây tồn tại một vấn đề có lẽ có khả năng giải quyết. Các phương trình như $x^2 = -3$, khi chúng xuất hiện, chỉ đơn giản là bị loại bỏ vì vô nghĩa.

Tuy nhiên, nó đã dần dần được nhận thức trong thế kỷ thứ mười tám, và thậm chí sớm hơn, sẽ rất thuận tiện biết bao nếu một cách giải thích có thể được gán cho những biểu tượng vô nghĩa này. Lập luận chính thức với các ký hiệu này đã được thông qua, chỉ giả định rằng chúng tuân theo các định luật biến đổi đại số thông thường; và người ta thấy rằng có thể đạt được cả một thế giới kết quả thú vị, nếu chỉ những biểu tượng này có thể được sử dụng một cách hợp pháp. Nhiều nhà toán học khi đó không rõ ràng về logic của thủ tục của họ, và một ý tưởng đã đạt được cơ sở rằng, theo một cách bí ẩn nào đó, các ký hiệu có nghĩa là không có gì có thể bằng thao tác thích hợp mang lại bằng chứng hợp lệ cho các mệnh đề. Không có gì có thể sai lầm hơn. Một biểu tượng chưa được xác định chính xác hoàn toàn không phải là một biểu tượng. Nó chỉ đơn thuần là một vết mực trên giấy có hình dạng dễ nhận biết. Không có gì có thể được chứng minh bằng một loạt các vết mờ, ngoại trừ sự tồn tại của một cây bút tồi hoặc một nhà văn bất cẩn. Chính trong thời kỳ này, danh từ “ảo”

đã được áp dụng cho $\sqrt{(-1)}$. Điều mà các nhà toán học này đã thực sự thành công trong việc chứng minh là một loạt mệnh đề giả thuyết, trong đó đây là dạng trống: Nếu tồn tại các diễn giải cho $\sqrt{(-1)}$ và cho phép cộng, trừ, nhân và chia $\sqrt{(-1)}$ làm cho các quy tắc đại số thông thường (*ví dụ* $x + y = y + x$, v.v.) được thỏa mãn, thì các kết quả như vậy và như vậy sẽ theo sau. Lẽ tự nhiên là các nhà toán học không phải lúc nào cũng đánh giá cao chữ "Nếu" lớn mà lẽ ra phải có trước các tuyên bố về kết quả của họ.

Như có thể mong đợi, việc giải thích, khi được tìm thấy, là một vấn đề phức tạp hơn nhiều so với các số âm và người đọc phải chú ý để có một số giải thích sơ bộ cẩn thận. Chúng ta đã bắt gặp cách biểu diễn một điểm bằng hai số. Bằng sự trợ giúp của các số dương và số âm của , giờ đây chúng ta có thể biểu thị vị trí



Hình 8.

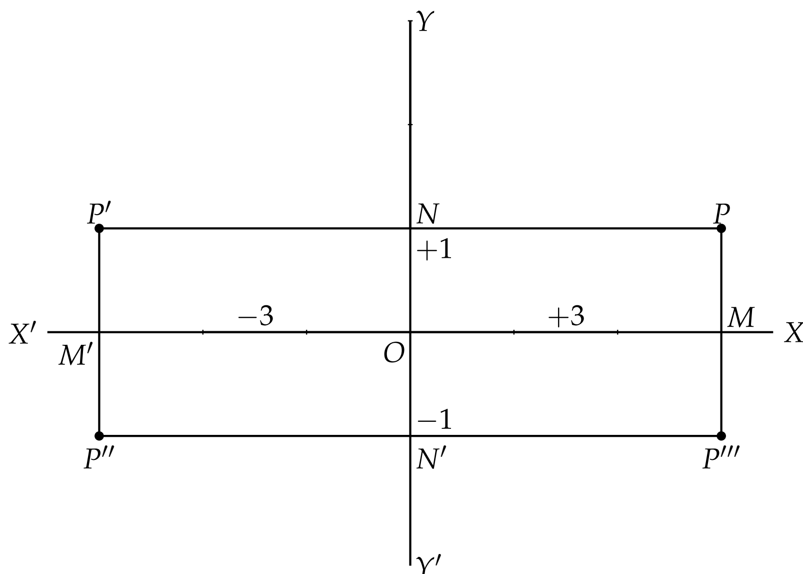
của bất kỳ điểm nào trong mặt phẳng bằng một cặp số như vậy. Vì vậy, chúng ta lấy cặp đường thẳng XOX' và YOY', vuông góc với nhau, làm "trục" mà từ đó chúng ta bắt đầu tất cả các phép đo của mình. Độ dài được đo dọc theo OX và OY là dương và được đo ngược dọc theo OX' và OY' là âm. Giả sử rằng một cặp

số, được viết theo thứ tự *ví dụ* $(+3, +1)$, sao cho là số đầu tiên ($+3$ trong ví dụ trên) và số thứ hai ($+1$ trong ví dụ trên), biểu thị số đo từ O dọc theo XOX' cho số đầu tiên và dọc theo YOY' cho số thứ hai. Do đó (*xem* Hình 9) tính bằng $(+3, +1)$ độ dài 3 đơn vị sẽ được đo dọc theo XOX' tính bằng chiều dương, tức là từ O đến X, và chiều dài $+1$ được đo dọc theo YOY' theo chiều dương, tức là từ O đến Y. Tương tự như vậy trong $(-3, +1)$ độ dài của 3 đơn vị sẽ được đo từ O hướng tới X' và của 1 đơn vị từ hướng tới Y. Ngoài ra, trong $(-3, -1)$, hai độ dài sẽ được đo lần lượt dọc theo OX' và OY', và trong $(+3, -1)$ dọc theo OX và OY' tương ứng. Bây giờ chúng ta hãy gọi một cặp số như vậy là "cặp số có thứ tự." Sau đó, từ hai số 1 và 3, có thể tạo ra tám cặp số có thứ tự, cụ thể là

$$(+1, +3),\ (-1, +3),\ (-1, -3),\ (+1, -3),$$
$$(+3, +1),\ (-3, +1),\ (-3, -1),\ (+3, -1).$$

Mỗi trong số tám "cặp có thứ tự" này chỉ đạo một quá trình đo lường dọc theo XOX' và YOY', khác với quá trình được chỉ đạo bởi bất kỳ cặp nào khác.

Các quá trình đo lường được đại diện bởi bốn cặp có thứ tự cuối cùng, được đề cập ở trên, được đưa ra bằng hình ảnh trong hình. Độ dài OM và ON cùng nhau tương ứng với đến $(+3, +1)$, độ dài OM' và ON cùng nhau tương ứng với $(-3, +1)$, OM' và ON' kết hợp thành $(-3, -1)$ và OM and ON' kết hợp thành $(+3, -1)$. Nhưng bằng cách hoàn thành các hình chữ nhật khác nhau, dễ dàng thấy rằng điểm P hoàn toàn xác định và được xác định bởi cặp có thứ tự $(+3, +1)$, điểm P' theo $(-3, +1)$, điểm P'' theo $(-3, -1)$ và điểm P''' theo $(+3, -1)$. Tổng quát hơn trong hình trước (8), điểm P tương ứng với cặp được sắp thứ tự (x, y), trong đó x và y trong hình đều là được giả định là dương, điểm P' tương ứng với (x', y), trong đó x' trong hình được giả định là âm, P'' to $(x'y')$ và P''' đến (x, y'). Do đó, một cặp có thứ tự (x, y), trong đó x và y là bất kỳ số dương hoặc số âm nào và điểm tương ứng xác định lẫn nhau. Rất thuận tiện để giới thiệu một số tên tại



Hình 9.

thời điểm này. Trong cặp có thứ tự (x, y), số đầu tiên x được gọi là "abscissa" của điểm tương ứng và số thứ hai y được gọi là " hoành độ " của điểm, và hai số cộng lại được gọi là "tọa độ" của điểm. Ý tưởng xác định vị trí của một điểm bằng "tọa độ" của nó hoàn toàn không phải là mới khi lý thuyết về "điểm tưởng tượng" được hình thành. Đó là do Descartes, nhà triết học và toán học vĩ đại người Pháp , và xuất hiện trong *diễn ngôn* của ông xuất bản tại Leyden năm 1637 SCN. Ý tưởng về cặp đôi có trật tự như một sự vật tự nó phát triển sau này và là kết quả của những nỗ lực diễn giải những điều tưởng tượng theo cách trừu tượng nhất có thể.

Có thể nhận thấy như một minh họa rõ hơn cho ý tưởng về cặp có thứ tự này, rằng điểm M trong Hình 9 là cặp $(+3, 0)$, điểm N là cặp $(0, +1)$, điểm M' cặp $(-3, 0)$, điểm N' cặp $(0, -1)$, là điểm O cặp đôi $(0, 0)$.

Một cách khác để biểu diễn cặp có thứ tự (x, y) là coi nó như biểu diễn đường chấm chấm OP (*xem* Hình 8), thay vì điểm P. Do đó, cặp có thứ tự đại diện cho một đường được vẽ từ "origin," O,

có độ dài nhất định và theo một hướng nhất định. Đường thẳng OP có thể được gọi là đường vectơ từ O đến P, hoặc bước từ O đến P. Do đó, chúng tôi thấy rằng chúng tôi có trong chương này chỉ mở rộng cách giải thích mà chúng tôi đã đưa ra trước đây về các số dương và số âm. Phương pháp biểu diễn bằng vectơ này rất hữu ích khi chúng ta xem xét ý nghĩa được gán cho các phép toán cộng và nhân của các cặp có thứ tự.

Bây giờ chúng ta sẽ tiếp tục với câu hỏi này, và hỏi ý nghĩa nào mà chúng ta sẽ thấy thuận tiện khi gán cho phép cộng của hai cặp có thứ tự (x, y) và (x', y'). Việc giải thích phải, (a) làm cho kết quả của phép cộng thành một cặp có thứ tự khác, (b) làm cho phép toán có tính chất giao hoán sao cho $(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y)$, ($c$) thực hiện phép toán liên kết sao cho

$$\{(x, y) + (x', y')\} + (u, v) = (x, y) + \{(x', y') + (u, v)\},$$

(d) làm cho kết quả của phép trừ là duy nhất, để khi chúng ta tìm cách xác định cặp có thứ tự chưa biết (x, y) sao cho thỏa mãn phương trình

$$(x, y) + (a, b) = (c, d),$$

có một và chỉ một câu trả lời mà chúng ta có thể đại diện bởi

$$(x, y) = (c, d) - (a, b).$$

Tất cả những điều kiện tiên quyết này đều được thỏa mãn bằng cách lấy $(x, y) + (x', y')$ nghĩa là cặp có thứ tự $(x + x', y + y')$. Theo đó, theo định nghĩa, chúng tôi đặt

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Lưu ý rằng ở đây chúng ta đã áp dụng thói quen toán học là sử dụng cùng một ký hiệu $+$ theo các nghĩa khác nhau. $+$ ở vế trái của phương trình có nghĩa mới là $+$ mà chúng ta vừa định nghĩa; trong khi hai $+$ ở phía bên tay phải có nghĩa là cộng các số dương và số âm (các phép toán) đã được định nghĩa trong chương trước.

Không có sự nhầm lẫn thực tế nào phát sinh từ việc sử dụng kép này.

Như ví dụ về bổ sung, chúng tôi có

$$(+3,+1)+(+2,+6)=(+5,+7),$$
$$(+3,-1)+(-2,-6)=(+1,-7),$$
$$(+3,+1)+(-3,-1)=(0,0).$$

Ý nghĩa của phép trừ bây giờ đã được giải quyết cho chúng ta. chúng tôi thấy rằng

$$(x,y)-(u,v)=(x-u,y-v).$$

Như vậy

$$(+3,+2)-(+1,+1)=(+2,+1),$$

và

$$(+1,-2)-(+2,-4)=(-1,+2),$$

và

$$(-1,-2)-(+2,+3)=(-3,-5).$$

Thật dễ dàng để thấy rằng

$$(x,y)-(u,v)=(x,y)+(-u,-v).$$

Cũng vậy

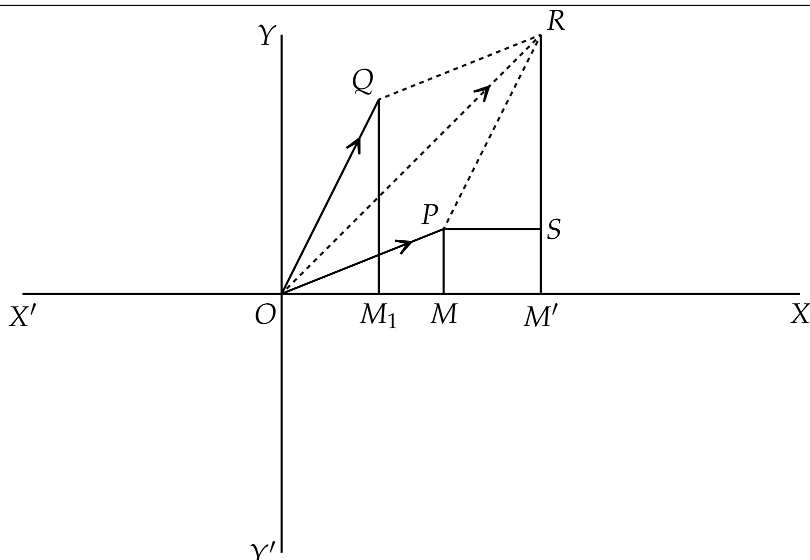
$$(x,y)-(x,y)=(0,0).$$

Do đó $(0,0)$ được coi là cặp số không có thứ tự. Ví dụ

$$(x,y)+(0,0)=(x,y).$$

Biểu diễn bằng hình ảnh của phép cộng các cặp có thứ tự dễ dàng một cách đáng ngạc nhiên.

Đặt OP đại diện cho (x,y) sao cho $OM=x$ và $PM=y$; đặt OQ đại diện cho (x_1,y_1) sao cho $OM_1=x_1$ và $QM_1=y_1$. Hoàn thành hình bình hành $OPRQ$ bằng các đường chấm



Hình 10.

chấm PR và QR, khi đó đường chéo OR là cặp có thứ tự $(x + x_1, y + y_1)$. Để vẽ PS song song với OX; thì rõ ràng các tam giác OQM_1 và PRS về mọi mặt đều bằng nhau. Do đó $MM' = PS = x_1$ và $RS = QM_1$ và do đó

$$OM' = OM + MM' = x + x_1,$$
$$RM' = SM' + RS = y + y_1.$$

Vì vậy, OR đại diện cho cặp được sắp xếp theo yêu cầu. Con số này cũng có thể được vẽ bằng OP và OQ trong các góc phần tư khác.

Rõ ràng là ở đây chúng ta quay trở lại với định luật hình bình hành, mà đã được đề cập trong Chương VI., về các định luật chuyển động, cũng như áp dụng cho vận tốc và lực. Cần nhớ rằng, nếu OP và OQ đại diện cho hai vận tốc, thì một hạt được cho là đang chuyển động với vận tốc bằng hai vận tốc cộng lại với nhau nếu nó chuyển động với vận tốc OR. Nói cách khác OR được cho là kết quả của hai vận tốc OP và OQ. Một lần nữa, các lực tác dụng tại một điểm của vật thể có thể được biểu diễn bằng các đường giống như vận tốc; và cùng một định luật hình

bình hành, cụ thể là, hợp lực của hai lực *OP* và *OQ* là lực được biểu diễn bởi đường chéo *OR*. Theo đó, chúng ta có thể coi một cặp có thứ tự đại diện cho vận tốc hoặc lực và quy tắc mà chúng ta vừa đưa ra cho phép cộng các cặp có thứ tự sau đó biểu thị các định luật cơ bản của cơ học về phép cộng các lực và vận tốc. Một trong những đặc điểm hấp dẫn nhất của toán học là cách đáng ngạc nhiên trong đó các ý tưởng và kết quả của các phần khác nhau của chủ đề ăn khớp với nhau. Trong các cuộc thảo luận về chương này và chương trước, chúng ta chỉ được hướng dẫn bởi những xem xét toán học thuần túy trừu tượng nhất; tuy nhiên, ở phần cuối của chúng, chúng ta được dẫn trở lại quy luật cơ bản nhất trong tất cả các quy luật tự nhiên, quy luật phải nằm trong tâm trí của mọi kỹ sư khi anh ta thiết kế một động cơ và của mọi kiến trúc sư hải quân khi anh ta tính toán độ ổn định. của một con tàu. Không có gì nghịch lý khi nói rằng trong tâm trạng lý thuyết nhất của chúng ta, chúng ta có thể ở gần những ứng dụng thực tế nhất của mình.

CHƯƠNG VIII

SỐ ẢO (*Tiếp tục*)

ĐỊNH NGHĨA phép nhân các cặp vợ chồng được sắp xếp được hướng dẫn bởi chính xác như nhau xem xét như là của bổ sung của họ. Việc giải thích phép nhân phải được như vậy mà

(α) kết quả là một cặp có thứ tự khác,

(β) phép toán có tính chất giao hoán, do đó

$$(x, y) \times (x', y') = (x', y') \times (x, y),$$

(γ) hoạt động là kết hợp, do đó

$$\{(x, y) \times (x', y')\} \times (u, v) = (x, y) \times \{(x', y') \times (u, v)\},$$

(δ) phải làm cho kết quả của phép chia là duy nhất [ngoại trừ trường hợp cặp số 0 $(0, 0)$], để khi chúng ta tìm cách xác định cặp số chưa biết (x, y) sao cho thỏa mãn phương trình

$$(x, y) \times (a, b) = (c, d),$$

có một và chỉ một câu trả lời, mà chúng ta có thể đại diện bởi

$$(x, y) = (c, d)(a, b), \quad \text{or by} \quad (x, y) = \frac{(c, d)}{(a, b)}.$$

(ϵ) Ngoài ra, luật liên quan đến cả phép cộng và phép nhân, được gọi là luật phân phối, phải được thỏa mãn, cụ thể là

$$(x, y) \times \{(a, b) + (c, d)\} = \{(x, y) \times (a, b)\} + \{(x, y) \times (c, d)\}.$$

Tất cả các điều kiện (α), (β), (γ), (δ), (ϵ) đều có thể được thỏa mãn bằng cách giải thích, mặc dù thoạt nhìn có vẻ phức tạp, nhưng có khả năng giải thích hình học đơn giản.

Theo định nghĩa, chúng tôi đặt

$$(A) \qquad (x, y) \times (x', y') = \{(xx' - yy'), (xy' + x'y)\}.$$

Đây là định nghĩa về ý nghĩa của ký hiệu $\times$ khi nó được viết giữa hai cặp có thứ tự. Rõ ràng từ định nghĩa này, kết quả của phép nhân là một cặp có thứ tự khác, và giá trị của vế phải của phương trình (A) không bị thay đổi khi đổi chỗ x với $x\O ngthi'$, và y với y'. Do đó, các điều kiện (α) và (β) hiển nhiên được thỏa mãn. Việc chứng minh sự thỏa mãn của (γ), (δ), (ϵ) cũng dễ dàng không kém khi chúng ta đã đưa ra cách diễn giải hình học mà chúng ta sẽ tiến hành trong một khoảnh khắc. Nhưng trước khi làm điều này, sẽ rất thú vị khi tạm dừng và xem liệu chúng ta đã đạt được đối tượng mà tất cả công phu này đã được bắt đầu hay chưa.

Chúng tôi đã bắt gặp các phương trình có dạng $x^2 = -3$, không thể gán nghiệm nào dưới dạng số thực dương và âm. Sau đó, chúng tôi thấy rằng mọi khó khăn của chúng tôi sẽ biến mất nếu chúng tôi có thể diễn giải phương trình $x^2 = -1$, tức là, nếu chúng tôi có thể định nghĩa như vậy $\sqrt{(-1)}$ mà $\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = -1$.

Bây giờ chúng ta hãy xem xét ba cặp thứ tự đặc biệt* $(0, 0)$, $(1, 0)$ và $(0, 1)$.

Chúng tôi đã chứng minh rằng

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y).$$

Hơn nữa bây giờ chúng ta có

$$(x, y) \times (0, 0) = (0, 0).$$

Do đó, cả đối với phép cộng và phép nhân, cặp $(0, 0)$ đóng vai trò là một phần của số 0 trong số học và đại số cơ bản; so sánh các phương trình trên với $x + 0 = x$ và $x \times 0 = 0$.

Một lần nữa hãy xem xét $(1, 0)$: cái này đóng vai trò là một phần của 1 trong số học và đại số cơ bản. Trong các môn khoa

*Trong tương lai, chúng ta tuân theo thông lệ bỏ qua dấu $+$ bất cứ khi nào có thể, do đó $(1, 0)$ là viết tắt của $(+1, 0)$ và $(0, 1)$ cho $(0, +1)$.

học cơ bản này, đặc điểm đặc biệt của 1 là $x \times 1 = x$, với mọi giá trị của x. Bây giờ theo luật nhân của chúng ta

$$(x,y) \times (1,0) = \{(x-0),(y+0)\} = (x,y).$$

Do đó $(1,0)$ là cặp đơn vị.

Cuối cùng hãy xem xét $(0,1)$: điều này sẽ giải thích cho chúng ta ký hiệu $\sqrt{(-1)}$. Do đó, biểu tượng phải sở hữu thuộc tính đặc trưng $\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = -1$. Bây giờ theo luật nhân cho các cặp có thứ tự

$$(0,1) \times (0,1) = \{(0-1),(0+0)\} = (-1,0).$$

Nhưng $(1,0)$ là cặp đơn vị và $(-1,0)$ là cặp đơn vị âm; sao cho $(0,1)$ có thuộc tính mong muốn. Tuy nhiên, có hai gốc của -1 được cung cấp, cụ thể là $\pm\sqrt{(-1)}$. Xem xét $(0,-1)$; ở đây một lần nữa nhớ rằng $(-1)^2 = 1$, chúng ta tìm được $(0,-1) \times (0,-1) = (-1,0)$.

Do đó, $(0,-1)$ là căn bậc hai khác của -1. Theo đó, các cặp có thứ tự $(0,1)$ và $(0,-1)$ là cách diễn giải của $\pm\sqrt{(-1)}$ xét theo các cặp có thứ tự. Nhưng cái nào tương ứng với cái nào? $(0,1)$ có tương ứng với $+\sqrt{(-1)}$ và $(0,-1)$ với $-\sqrt{(-1)}$ hay $(0,1)$ thành $-\sqrt{(-1)}$ và $(0,-1)$ thành $+\sqrt{(-1)}$? Câu trả lời là chúng ta áp dụng biểu tượng nào thì hoàn toàn không quan tâm.

Các cặp có thứ tự có thể được chia thành ba loại, (i) loại "ảo phức" (x,y), trong đó cả x lẫn y đều không bằng không; (ii) loại "thực" $(x,0)$; (iii) loại "tưởng tượng thuần túy" $(0,y)$. Chúng ta hãy xem xét mối quan hệ của các loại này với nhau. Trước tiên, nhân cặp "ảo phức" (x,y) và cặp "thực" $(a,0)$, chúng ta tìm được

$$(a,0) \times (x,y) = (ax, ay).$$

Do đó, hiệu quả chỉ là nhân từng số hạng của cặp (x,y) với số thực dương hoặc âm a.

Thứ hai, nhân cặp "ảo phức" (x,y) và cặp "ảo thuần" $(0,b)$, ta tìm được

$$(0,b) \times (x,y) = (-by, bx).$$

Ở đây, hiệu ứng phức tạp hơn và được hiểu rõ nhất trong cách giải thích hình học mà chúng ta tiến hành sau khi lưu ý ba trường hợp đặc biệt hơn nữa.

Thứ ba, chúng ta nhân cặp "thực" $(a, 0)$ với $(0, b)$ ảo và thu được

$$(a, 0) \times (0, b) = (0, ab).$$

Thứ tư, chúng ta nhân hai cặp "thực" $(a, 0)$ và $(a', 0)$ và thu được

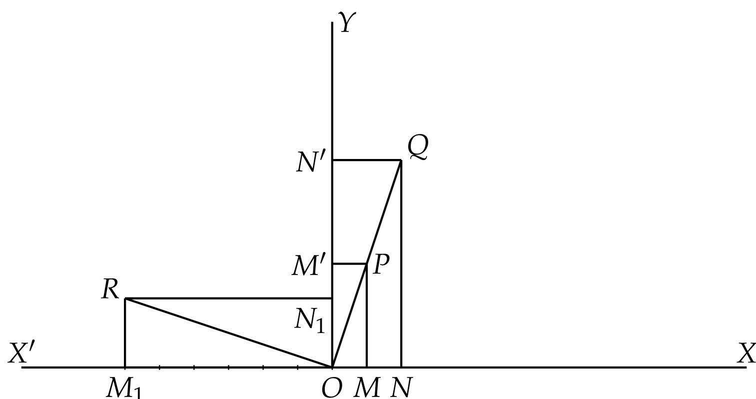
$$(a, 0) \times (a', 0) = (aa', 0).$$

Thứ năm, chúng ta nhân hai "cặp ảo" $(0, b)$ và $(0, b')$ và thu được

$$(0, b) \times (0, b') = (-bb', 0).$$

Bây giờ chúng ta chuyển sang giải thích hình học, trước hết bắt đầu với một số trường hợp đặc biệt. Lấy các cặp $(1, 3)$ và $(2, 0)$ rồi xét phương trình

$$(2, 0) \times (1, 3) = (2, 6).$$



Hình 11.

Trong sơ đồ (Hình 11) vectơ OP đại diện cho $(1, 3)$, và vectơ ON đại diện cho $(2, 0)$, và vectơ OQ đại diện cho $(2, 6)$. Do đó, tích $(2, 0) \times (1, 3)$ được tìm về mặt hình học bằng cách lấy độ dài của vectơ OQ là tích độ dài của các vectơ OP và ON, và (trong

trường hợp này) bằng cách tạo OP to Q để có độ dài yêu cầu. Một lần nữa, xét tích $(0,2) \times (1,3)$, ta có

$$(0,2) \times (1,3) = (-6,2).$$

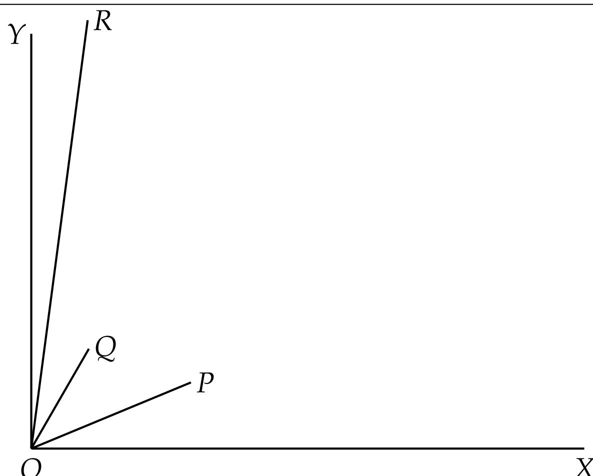
Vectơ ON_1, tương ứng với $(0,2)$ và vectơ OR với $(-6,2)$. Do đó, OR mà đại diện cho sản phẩm mới nằm vuông góc với OQ và có cùng độ dài. Lưu ý rằng chúng ta có cùng một định luật quy định độ dài của OQ như trong trường hợp trước, cụ thể là độ dài của nó là tích độ dài của hai vectơ được nhân với nhau; nhưng bây giờ chúng ta có ON_1 dọc theo trục "tọa độ" OY, thay vì ON dọc theo trục "abscissa" OX, hướng của OP có được quay qua một góc vuông.

Cho đến nay, trong các ví dụ về phép nhân này, chúng ta đã xem vectơ OP như được sửa đổi bởi các vectơ ON và ON_1. Chúng ta sẽ có manh mối về quy luật tổng quát cho hướng bằng cách đảo ngược cách nghĩ, và bằng cách nghĩ về các vectơ ON và ON_1 như được sửa đổi bởi vectơ OP. Quy luật về độ dài vẫn không bị ảnh hưởng; độ dài kết quả là độ dài của tích của hai vectơ. Hướng mới cho hình mở rộng ON (*tức là* OQ) được tìm thấy bằng cách xoay nó theo hướng xoay (ngược chiều kim đồng hồ) từ OX về phía OY qua một góc bằng với góc XOP: ngẫu nhiên trong trường hợp cụ thể này là phép quay này làm cho OQ nằm dọc theo đường thẳng OP. Một lần nữa xét tích của ON_1 và OP; hướng mới cho hình mở rộng ON_1 (*tức là* OR) được tìm thấy bằng cách xoay ON theo hướng quay ngược chiều kim đồng hồ qua một góc bằng với góc XOP, cụ thể là , góc N_1OR bằng góc XOP.

Quy tắc chung cho biểu diễn hình học của phép nhân bây giờ có thể được phát biểu như sau:

Tích của hai vectơ OP và OQ là một vectơ OR, có độ dài bằng tích độ dài của OP và OQ và có hướng OR sao cho góc XOR bằng tổng các góc XOP và XOQ.

Do đó, chúng ta có thể hình dung vectơ OP là làm cho vectơ OQ quay qua một góc XOP (tức là góc $QOR =$ góc XOP),



Hình 12.

hoặc vectơ OQ khi làm cho vectơ OP xoay qua góc XOQ (tức là góc $POR =$ góc XOQ).

Chúng tôi không chứng minh định luật tổng quát này, vì do đó chúng tôi sẽ được dẫn dắt vào các quy trình toán học kỹ thuật hơn là nằm trong thiết kế của cuốn sách này. Nhưng bây giờ chúng ta có thể thấy ngay rằng luật kết hợp [được đánh số (γ) ở trên] cho phép nhân được thỏa mãn. Trước tiên hãy xem xét độ dài của vectơ kết quả; điều này có được bằng quy trình nhân bình thường cho các số thực; và do đó luật kết hợp áp dụng cho nó.

Một lần nữa, hướng của vectơ kết quả có được chỉ bằng phép cộng các góc và định luật kết hợp cũng áp dụng cho quá trình này.

Quá nhiều cho phép nhân. Bây giờ chúng ta đã nhanh chóng chỉ ra, bằng cách xem xét phép cộng và phép nhân, cách có thể xây dựng một đại số hoặc "phép tính" của các vectơ trong một mặt phẳng, sao cho hai vectơ bất kỳ trong mặt phẳng có thể được cộng hoặc trừ, và có thể nhân lên hoặc chia cho nhau.

Chúng tôi đã không xem xét các chi tiết kỹ thuật của tất cả các quy trình này vì nó sẽ dẫn chúng tôi đi quá xa vào các chi tiết toán học; nhưng chúng tôi đã chỉ ra phương thức chung của thủ tục. Khi diễn giải các ký hiệu đại số của mình theo cách này,

chúng ta được cho là đang sử dụng các đại lượng "đại lượng ảo" hoặc "phức ." Các thuật ngữ này chỉ là chi tiết, và chúng ta có quá nhiều điều để suy nghĩ về việc dừng lại để hỏi xem họ có được chọn một cách vui vẻ hay không.

Kết quả cuối cùng của cuộc điều tra của chúng tôi là bất kỳ phương trình nào như $x+3=2$ hoặc $(x+3)^2=-2$ giờ đây luôn có thể được diễn giải thành vectơ và nghiệm được tìm thấy cho họ. Khi tìm kiếm những cách giải thích như vậy, cần lưu ý rằng 3 trở thành $(3,0)$, và -2 trở thành $(-2,0)$, và x trở thành "ẩn số' ' cặp đôi (u,v): nên hai phương trình lần lượt trở thành $(u,v)+(3,0)=(2,0)$, và $\{(u,v)+(3,0)\}^2=(-2,0)$.

Bây giờ chúng tôi đã hoàn toàn giải quyết được những khó khăn ban đầu đập vào mắt chúng tôi ngay khi chúng tôi xem xét ngay cả các yếu tố của đại số. Khoa học khi nó xuất hiện từ giải pháp về mặt ý tưởng phức tạp hơn nhiều so với khoa học mà chúng tôi đã bắt đầu. Trên thực tế, chúng ta đã tạo ra một ngành khoa học mới và hoàn toàn khác, sẽ phục vụ tất cả các mục đích mà ngành khoa học cũ đã được phát minh ra và nhiều mục đích khác nữa. Nhưng, trước khi chúng ta có thể chúc mừng bản thân về kết quả lao động này, chúng ta phải xoa dịu một mối nghi ngờ mà lẽ ra lúc này đã nảy sinh trong tâm trí của sinh viên. Câu hỏi mà độc giả nên tự hỏi mình là: Tất cả những phát minh về cách diễn giải mới này sẽ kết thúc ở đâu? Đúng là chúng ta đã thành công trong việc diễn giải đại số để luôn có thể giải phương trình bậc hai như $x^2-2x+4=0$; nhưng có vô số phương trình khác, ví dụ: $x^3-2x+4=0$, $x^4+x^3+2=0$, v.v. không giới hạn . Chúng ta có phải tạo ra một khoa học mới bất cứ khi nào một phương trình mới xuất hiện không?

Bây giờ, nếu đây là trường hợp, thì toàn bộ cuộc điều tra trước đây của chúng tôi, mặc dù đối với một số người chúng có thể gây cười, trên thực tế sẽ có tầm quan trọng rất nhỏ. Nhưng sự thật tuyệt vời, đã làm cho phép phân tích hiện đại trở nên khả thi, đó là, nhờ sự trợ giúp của phép tính vectơ này, mọi công thức phát sinh đều có thể nhận được cách giải thích đúng đắn của nó; và

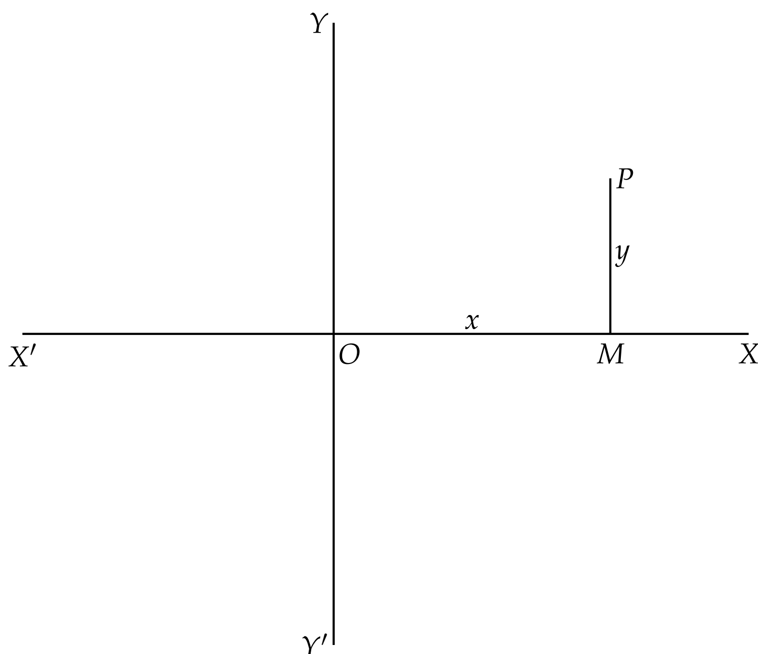
đại lượng "không xác định" trong mọi phương trình có thể được chỉ ra để chỉ ra một số vectơ. Như vậy, khoa học hiện nay đã hoàn thiện về mặt bản thân các ý tưởng cơ bản của nó. Nó đã nhận được hình thức cuối cùng cùng thời điểm với khi động cơ hơi nước được hoàn thiện, và sẽ vẫn là một vũ khí tuyệt vời và mạnh mẽ để đạt được chiến thắng của tư tưởng đối với mọi thứ khi các mẫu vật gây tò mò của cỗ máy đó được đặt trong các bảo tàng cùng với mũ bảo hiểm và tấm che ngực của một kỷ nguyên sớm hơn một chút.

CHƯƠNG IX

HÌNH HỌC TỌA ĐỘ

CÁC phương pháp và ý tưởng của hình học tọa độ đã được sử dụng trong các chương trước. Bây giờ là lúc để chúng ta xem xét chúng chặt chẽ hơn vì lợi ích của chính chúng; và khi làm như vậy, chúng tôi sẽ củng cố khả năng nắm giữ những ý tưởng khác mà chúng tôi đã đạt được. Trong các chương hiện tại và các chương tiếp theo, chúng ta sẽ quay trở lại ý tưởng về số thực dương và số thực và sẽ bỏ qua các số ảo đã được giới thiệu trong hai chương trước.

Chúng tôi luôn sử dụng ý tưởng rằng, bằng cách lấy hai trục XOX' và YOY', trong một mặt phẳng, bất kỳ điểm nào P trong mặt phẳng đó đều có thể được xác định vị trí theo một cặp dương hoặc âm. số x và y, trong đó (*xem* Hình 13) x là chiều dài OM và y là chiều dài PM. Khái niệm này, dù có vẻ đơn giản, là ý tưởng chính của chủ đề lớn về hình học tọa độ. Khám phá của nó đánh dấu một kỷ nguyên quan trọng trong lịch sử tư tưởng toán học. Đó là do (như đã nói) của nhà triết học Descartes, và đã xảy ra với ông như một phương pháp toán học quan trọng vào một buổi sáng khi ông nằm trên giường. Các nhà triết học, khi họ đã sở hữu một kiến thức thấu đáo về toán học, là một trong số những người đã làm phong phú thêm khoa học với một số ý tưởng tốt nhất của nó. Mặt khác, phải nói rằng, hầu như không có ngoại lệ, tất cả những nhận xét về toán học của những nhà triết học đã sở hữu nhưng kiến thức ít ỏi hoặc vội vàng và tiếp thu muộn màng đều hoàn toàn vô giá trị, hoặc tầm thường hoặc sai lầm. Thực tế là một điều gây tò mò; vì xét cho cùng, những ý tưởng cơ bản của toán học dường như rất đơn giản, gần như trẻ con và nằm trong phạm vi tư tưởng triết học. Có lẽ chính sự đơn giản của chúng là nguyên nhân gây ra lỗi; chúng ta không quen nghĩ về những điều trừu tượng đơn giản như vậy, và cần phải rèn luyện lâu dài để đảm bảo thậm chí một phần miễn nhiễm với sai lầm ngay khi



Hình 13.

chúng ta chuyển hướng khỏi lối mòn suy nghĩ.

Việc khám phá ra hình học tọa độ, và cả hình học xạ ảnh cùng một lúc, minh họa cho một thực tế khác đang được kiểm chứng liên tục trong lịch sử tri thức, đó là, một số khám phá vĩ đại nhất sẽ được thực hiện trong số những chủ đề nổi tiếng nhất. . Vào thời điểm thế kỷ XVII đã đến, hình học đã được nghiên cứu hơn hai nghìn năm, ngay cả khi chúng ta xác định niên đại của nó với người Hy Lạp. Euclid, giảng dạy tại Đại học Alexandria, sinh khoảng 330 TCN; và ông chỉ hệ thống hóa và mở rộng công trình của một loạt dài những người đi trước, một số trong số họ là những thiên tài. Sau ông, thế hệ sau thế hệ các nhà toán học đã làm việc để cải thiện chủ đề này. Đối tượng cũng không phải chịu trở ngại chết người đó để tiến bộ, cụ thể là nghiên cứu của nó chỉ giới hạn trong một nhóm hẹp những người đàn ông có nguồn gốc và quan điểm tương tự — hoàn toàn ngược lại; đến thế kỷ XVII, nó đã đi qua trong tâm trí của người Ai Cập và người Hy Lạp, người Ả Rập và người Đức. Tuy nhiên, sau tất cả những nỗ

lực mà những bộ óc đa dạng như vậy đã cống hiến cho nó qua rất nhiều thời đại, những bí mật quan trọng nhất của nó vẫn chưa được khám phá.

Không ai có thể nghiên cứu ngay cả những yếu tố của hình học cơ bản mà không cảm thấy thiếu một số phương pháp hướng dẫn. Mỗi đề xuất phải được chứng minh bằng một màn trình diễn mới của sự khéo léo; và một khoa học mà điều này là đúng thì thiếu điều kiện tiên quyết của tư duy khoa học, đó là phương pháp. Giờ đây, điểm đặc biệt của hình học tọa độ là lần đầu tiên nó giới thiệu phương pháp. Các suy luận từ xa của một khoa học toán học không có tầm quan trọng lý thuyết chính. Khoa học vẫn chưa được hoàn thiện cho đến khi về bản chất nó bao gồm việc triển khai các phương pháp tuyệt vời có liên quan nhờ đó có thể dễ dàng thu được thông tin, về bất kỳ chủ đề mong muốn nào thuộc phạm vi của nó. Sự phát triển của một khoa học chủ yếu không phải ở số lượng lớn mà ở các ý tưởng; và ý tưởng càng phát triển thì càng ít những suy luận đáng để viết ra. Thật không may, toán học luôn bị cản trở bởi sự lặp lại trong sách giáo khoa vô số mệnh đề phụ, mà tầm quan trọng của chúng đã bị mất đi do chúng bị hấp thụ vào vai trò của các trường hợp cụ thể của các chân lý tổng quát hơn—và, như chúng tôi đã nhấn mạnh, tính tổng quát là linh hồn của toán học.

Một lần nữa, hình học tọa độ minh họa một đặc điểm khác của toán học đã được chỉ ra, cụ thể là các khoa học toán học khi chúng phát triển ăn khớp với nhau và chia sẻ những ý tưởng chung. Không quá khi nói rằng các nhánh khác nhau của toán học trải qua một quá trình tổng quát hóa không ngừng, và khi chúng trở nên tổng quát hóa, chúng kết hợp lại với nhau. Ở đây, một lần nữa, lý do bắt nguồn từ chính bản chất của khoa học, tính tổng quát của nó, nghĩa là, từ thực tế là khoa học liên quan đến những chân lý chung áp dụng cho mọi sự vật do chính sự tồn tại của chúng với tư cách là sự vật. Trong mối liên hệ này, lợi ích của hình học tọa độ nằm ở chỗ nó liên kết với nhau hình học, khởi đầu là khoa học về không gian và đại số, có nguồn gốc từ

khoa học về số.

Bây giờ chúng ta hãy nhớ lại những ý tưởng chính của hai ngành khoa học, và sau đó xem chúng có liên quan như thế nào theo phương pháp tọa độ của Descartes. Hãy sử dụng đại số ngay từ đầu. Chúng ta sẽ không bận tâm về những con số tưởng tượng và sẽ chỉ nghĩ đến những con số thực với những dấu hiệu tích cực hoặc tiêu cực. Ý tưởng cơ bản là bất kỳ số nào, số thay đổi, được biểu thị bằng một chữ cái chứ không phải bằng bất kỳ chữ số xác định nào. Sau đó chúng tôi tiến hành xem xét mối tương quan giữa các biến. Ví dụ: nếu x và y là hai biến, thì chúng ta có thể hình dung chúng tương quan với nhau theo phương trình $x + y = 1$ hoặc theo $x - y = 1$ hoặc theo bất kỳ một trong vô số cách khác. Điều này ngay lập tức dẫn đến việc áp dụng ý tưởng của dạng đại số. Trên thực tế, chúng tôi nghĩ về bất kỳ mối tương quan thuộc loại thú vị nào đó, do đó phát triển từ quan niệm ban đầu về các số thay đổi thành quan niệm thứ cấp về tương quan thay đổi của các số. Vì vậy, chúng tôi tổng quát hóa mối tương quan $x + y = 1$, thành mối tương quan $ax + by = c$. Ở đây a and b and c, là các chữ cái, đại diện cho bất kỳ số nào và trên thực tế bản thân chúng là các biến. Nhưng chúng là những biến xác định tương quan biến; và mối tương quan, khi được xác định, sẽ tương quan với các số biến x và y. Các biến, như a, b, và c ở trên, được sử dụng để xác định mối tương quan được gọi là "hằng số" hoặc tham số. Việc sử dụng của thuật ngữ "hằng số" trong mối liên hệ này cho cái thực sự là một biến số thoạt nhìn có vẻ kỳ cục; nhưng nó thực sự rất tự nhiên. Đối với cuộc điều tra toán học liên quan đến mối quan hệ giữa các biến x và y, sau khi a, b, c được cho là đã được xác định. Vì vậy, theo một nghĩa nào đó, so với x và y, "hằng số" a, b và c là các hằng số. Do đó, $ax + by = c$ là viết tắt của ví dụ tổng quát của một dạng đại số nhất định, nghĩa là, cho một tương quan biến thuộc về một lớp nhất định.

Một lần nữa, chúng ta khái quát hóa $x^2 + y^2 = 1$ thành $ax^2 + by^2 = c$ hoặc xa hơn nữa thành $ax^2 + 2hxy + by^2 = c$, hoặc xa hơn nữa, thành $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy = c$.

Ở đây một lần nữa chúng ta được dẫn đến các mối tương quan biến đổi được biểu thị bằng các dạng đại số khác nhau của chúng.

Bây giờ chúng ta hãy chuyển sang hình học. Cái tên của ngành khoa học này ngay lập tức gợi cho chúng ta ý nghĩ về các hình vẽ và biểu đồ thể hiện các hình tam giác, hình chữ nhật, hình vuông và hình tròn, tất cả đều có mối quan hệ đặc biệt với nhau. Việc nghiên cứu các tính chất đơn giản của những hình này là chủ đề của hình học cơ bản, vì nó được trình bày phù hợp cho người mới bắt đầu. Tuy nhiên, suy nghĩ một chút sẽ cho thấy rằng đây không phải là quan niệm thực sự về chủ đề này. Có thể đúng khi một đứa trẻ bắt đầu lập luận hình học của mình về các hình dạng, chẳng hạn như hình tam giác và hình vuông, mà trẻ đã cắt ra bằng kéo. Tuy nhiên, tam giác là gì? Nó là một hình được đánh dấu và giới hạn bởi ba bit của ba đường thẳng.

Giờ đây, ranh giới của các không gian bằng các mảnh đường là một ý tưởng rất phức tạp, và hoàn toàn không phải là ý tưởng mang lại bất kỳ hy vọng nào về việc thể hiện các quan niệm chung đơn giản sẽ tạo thành xương của chủ đề. Chúng tôi muốn một cái gì đó đơn giản hơn và tổng quát hơn. Chính nỗi ám ảnh về những ý tưởng ban đầu sai lầm này—những ý tưởng rất tự nhiên và tốt để tạo ra những suy nghĩ đầu tiên về chủ đề này—là nguyên nhân dẫn đến sự khô khan so sánh của việc nghiên cứu khoa học trong thời gian đó. nhiều thế kỷ. Hình học tọa độ, và Descartes người phát minh ra nó, phải có công trong việc tiết lộ các đối tượng đơn giản thực sự cho tư duy hình học.

Thay vì một chút đường thẳng, chúng ta hãy nghĩ về toàn bộ một đường thẳng trong suốt chiều dài vô tận của nó theo cả hai hướng. Đây là loại ý tưởng chung để bắt đầu nghiên cứu hình học của chúng ta. Người Hy Lạp dường như chưa bao giờ tìm thấy bất kỳ cách sử dụng nào đối với quan niệm này mà giờ đây nó trở thành nền tảng trong mọi tư duy hình học hiện đại. Euclid luôn dự tính một đường thẳng được vẽ giữa hai điểm xác định và rất cẩn thận đề cập đến thời điểm nó được tạo ra ngoài đoạn này.

Anh ta không bao giờ nghĩ về dòng như một thực thể được đưa ra một lần cho tất cả như một tổng thể. Định nghĩa và giới hạn cẩn thận này, để loại trừ một vô hạn không hiển nhiên ngay lập tức đối với các giác quan, là rất đặc trưng của người Hy Lạp trong tất cả các hoạt động của họ. Nó được tôn vinh trong sự khác biệt giữa kiến trúc Hy Lạp và kiến trúc Gothic, và giữa tôn giáo Hy Lạp và tôn giáo hiện đại. Ngọn tháp trên một nhà thờ Gothic và tầm quan trọng của đường thẳng không giới hạn trong hình học hiện đại đều là biểu tượng cho sự biến đổi của thế giới hiện đại.

Theo đó, đường thẳng, được coi là một tổng thể, là ý tưởng gốc mà từ đó hình học hiện đại bắt đầu. Nhưng rồi những loại đường khác xuất hiện trong đầu chúng ta, và chúng ta đi đến khái niệm về một đường cong hoàn chỉnh mà tại mọi điểm của nó đều biểu hiện một số đặc tính đồng nhất, giống như đường thẳng biểu hiện tại mọi điểm đều mang đặc tính thẳng. Ví dụ: có hình tròn mà tại mọi điểm đều thể hiện đặc điểm là cách tâm của nó một khoảng nhất định, và lại có hình elip, là một đường cong hình bầu dục, sao cho tổng hai khoảng cách của bất kỳ điểm nào trên nó từ hai điểm cố định, được gọi là *Cực* của nó, không đổi đối với tất cả các điểm trên đường cong. Rõ ràng là một đường tròn chỉ là một trường hợp cụ thể của một hình elip khi hai tiêu điểm được đặt chồng lên nhau tại cùng một điểm; vì khi đó tổng của hai khoảng cách chỉ bằng hai lần bán kính của hình tròn. Người xưa đã biết tính chất của hình elip và hình tròn và tất nhiên coi chúng là những tổng thể. Ví dụ, Euclid không bao giờ bắt đầu với các phân đoạn đơn thuần (tức là, bit) của vòng tròn, sau đó kéo dài. Anh ta luôn xem xét toàn bộ vòng tròn như được mô tả. Thật không may là đường tròn không phải là đường cơ bản thực sự trong hình học, do đó việc xem xét khiếm khuyết của ông về đường thẳng có thể ít gây ra hậu quả hơn.

Ý tưởng chung về một đường cong mà tại bất kỳ điểm nào của nó thể hiện một số thuộc tính đồng nhất được thể hiện trong hình học bằng thuật ngữ “quỹ tích.” Quỹ tích là đường cong (hoặc bề mặt, nếu chúng ta không giới hạn mình trong một mặt phẳng)

được hình thành bởi các điểm, tất cả chúng đều sở hữu một số tính chất nhất định. Đối với mọi thuộc tính trong mối quan hệ với nhau mà các điểm có thể có, sẽ có một quỹ tích tương ứng, bao gồm tất cả các điểm sở hữu thuộc tính đó. Khi nghiên cứu các tính chất của một quỹ tích được xem xét như một tổng thể, chúng ta xem xét điểm *bất kỳ* hoặc các điểm trên quỹ tích. Vì vậy, trong hình học, chúng ta lại gặp ý tưởng cơ bản về biến số. Hơn nữa, khi phân loại các locus dưới các tiêu đề như đường thẳng, đường tròn, hình elip, v.v., chúng ta lại tìm thấy ý tưởng về hình thức.

Theo đó, giống như trong đại số, chúng ta quan tâm đến các biến số, mối tương quan giữa các biến số và phân loại các mối tương quan thành các loại theo ý tưởng về dạng đại số; vì vậy trong hình học chúng ta quan tâm đến các điểm biến thiên, các điểm biến thiên thỏa mãn điều kiện nào đó để từ dạng thành quỹ tích, và việc phân loại *loci* thành các loại dựa trên ý tưởng về các điều kiện có cùng dạng.

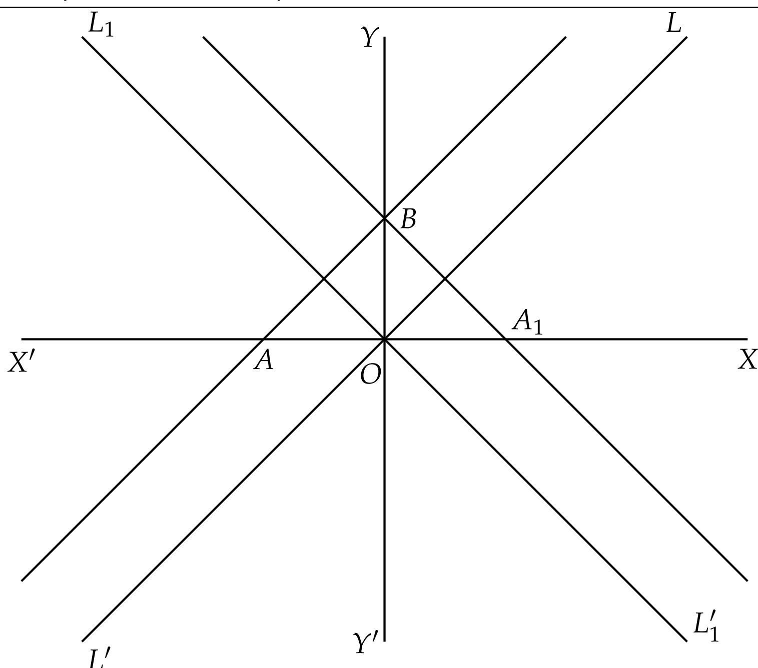
Bây giờ, bản chất của hình học tọa độ là sự xác định mối tương quan đại số với quỹ tích hình học. Điểm trên một mặt phẳng được biểu diễn trong đại số bởi hai tọa độ của nó, x và y, và điều kiện thỏa mãn bởi bất kỳ điểm nào trên quỹ tích được biểu diễn bằng hệ thức tương quan giữa x và y. Cuối cùng, đối với các mối tương quan có thể biểu thị dưới dạng đại số tổng quát nào đó, chẳng hạn như $ax + by = c$, có các locus tương ứng thuộc một loại tổng quát nào đó, mà các điều kiện hình học của chúng đều có cùng dạng. Do đó, chúng ta đã đạt đến một vị trí mà chúng ta có thể thực hiện một sự trao đổi hoàn toàn về ý tưởng và kết quả giữa hai ngành khoa học. Mỗi ngành khoa học soi sáng cho ngành khoa học khác và bản thân nó đạt được sức mạnh vô cùng lớn. Không thể không xúc động khi nghĩ đến cảm xúc của con người trong những khoảnh khắc phiêu lưu và khám phá lịch sử nhất định—Columbus khi lần đầu tiên nhìn thấy bờ biển phía Tây, Pizarro khi nhìn chằm chằm vào Thái Bình Dương Đại dương, Franklin khi tia lửa điện phát ra từ dây diều của , Galileo khi lần

đầu tiên hướng kính viễn vọng của mình lên bầu trời. Những khoảnh khắc như vậy cũng được trao cho sinh viên trong các lĩnh vực tư duy trừu tượng, và cao nhất trong số đó phải được đặt vào buổi sáng khi Descartes nằm trên giường và phát minh ra phương pháp của hình học tọa độ.

Khi một người đã nắm bắt được ý tưởng về hình học tọa độ, câu hỏi ngay lập tức nảy ra trong đầu là, Loại quỹ tích nào tương ứng với các dạng đại số đã biết? Ví dụ, dạng đơn giản nhất trong số các dạng đại số chung là $ax + by = c$. Loại quỹ tích tương ứng với đây là một đường thẳng và ngược lại với mọi đường thẳng tương ứng với một phương trình có dạng này. Thật may mắn là cái đơn giản nhất trong số các locus hình học lại tương ứng với cái đơn giản nhất trong số các dạng đại số. Thật vậy, chính sự tương ứng chung của sự đơn giản về mặt hình học và đại số đã mang lại cho toàn bộ chủ đề sức mạnh của nó. Nó xuất phát từ thực tế là mối liên hệ giữa hình học và đại số không phải là ngẫu nhiên và giả tạo, mà là sâu xa và thiết yếu. Phương trình tương ứng với một quỹ tích được gọi là phương trình "của" (hoặc "với") quỹ tích. Một số ví dụ về phương trình đường thẳng sẽ minh họa cho chủ đề.

Xét $y - x = 0$; ở đây a, b và c, ở dạng chung đã được thay thế bằng $-1, 1$ và 0 tương ứng. Đường này đi qua "gốc," O, trong sơ đồ và chia đôi góc XOY. Nó là dòng $L'OL$ của sơ đồ. Thực tế là nó đi qua gốc tọa độ, O, có thể dễ dàng nhận thấy bằng cách quan sát rằng phương trình được thỏa mãn bằng cách đặt $x = 0$ và $y = 0$ đồng thời, nhưng 0 và 0 là tọa độ của O. Trên thực tế, thật dễ dàng để khái quát hóa và bằng cùng một phương pháp để thấy rằng phương trình của bất kỳ đường thẳng nào đi qua gốc tọa độ đều có dạng $ax + by = 0$. Quỹ tích của the phương trình $y + x = 0$ cũng đi qua gốc tọa độ và chia đôi góc $X'OY$: đó là đường thẳng L_1OL_1' của sơ đồ.

Xét $y - x = 1$: quỹ tích tương ứng không đi qua gốc tọa độ. Do đó, chúng tôi tìm kiếm nơi nó cắt các trục. Nó phải cắt trục của x tại một số điểm có tọa độ x và 0. Nhưng đặt $y = 0$ vào



Hình 14.

phương trình, chúng ta có $x = -1$; nên tọa độ của điểm này (A) là 1 and 0. Tương tự, điểm (B) nơi đường thẳng cắt trục OY là 0 và 1. Quỹ tích là đường thẳng AB trong hình và song song với LOL'. Tương tự $y + x = 1$ là phương trình của đường thẳng A_1B của hình; và quỹ tích song song với $L_1OL'_1$. Dễ dàng chứng minh định lý tổng quát rằng hai đường thẳng được biểu diễn bởi các phương trình có dạng $ax + by = 0$ và $ax + by = c$ song song với nhau.

Nhóm các locus mà chúng ta gặp tiếp theo đủ quan trọng để xứng đáng có một chương riêng. Nhưng trước khi tiếp tục với chúng, chúng ta sẽ xem xét các ý chính của chủ đề lâu hơn một chút.

Vị trí của bất kỳ điểm nào P được xác định bằng cách tùy ý chọn gốc tọa độ, O, hai trục, OX và OY, vuông góc, rồi ghi chú tọa độ x and y, tức là OM và PM (*xem* Hình 13). Ngoài ra, như chúng ta đã thấy trong chương trước, P có thể được xác định bởi "vectơ" OP, trong đó ý tưởng về vectơ bao gồm một hướng xác

định cũng như một độ dài xác định. Từ quan điểm toán học trừu tượng, ý tưởng về một nguồn gốc tùy ý có vẻ giả tạo và vụng về, và tương tự như vậy đối với các trục được vẽ tùy ý, OX and OY. Nhưng liên quan đến việc áp dụng toán học vào sự kiện của Vũ trụ, chúng ta ở đây biểu tượng một cách đơn giản trực tiếp sự thật cơ bản nhất liên quan đến cách nhìn về thế giới mà các giác quan của chúng ta dành cho chúng ta. Mỗi chúng ta đều quy những nhận thức hợp lý của mình về mọi thứ về một nguồn gốc mà chúng ta gọi là "ở đây": vị trí của chúng ta trong một phần cụ thể của không gian xung quanh mà chúng ta nhóm toàn bộ Vũ trụ là thực tế thiết yếu của sự tồn tại vật chất của chúng ta. Chúng ta có thể hình dung những chúng sinh quan sát mọi hiện tượng trong mọi không gian bằng con mắt bình đẳng, không thiên vị bất cứ phần nào. Với chúng ta thì ngược lại, một con mèo dưới chân của chúng ta thu hút nhiều sự chú ý hơn là một trận động đất ở Cape Horn hoặc hơn là sự hủy diệt của một thế giới trong Dải Ngân hà. Đúng là trong việc tạo ra một kho kiến thức chung với đồng loại của mình, chúng ta phải từ bỏ một chút gì đó về chủ nghĩa vị kỷ khắt khe của cá nhân chúng ta "ở đây". Chúng ta thay thế "gần đây" cho "ở đây"; do đó chúng tôi đo dặm từ tòa thị chính của thị trấn gần nhất, hoặc từ thủ đô của đất nước. Khi đo trái đất, các nhà khoa học sẽ đặt điểm gốc ở tâm trái đất; các nhà thiên văn học thậm chí còn vươn tới chủ nghĩa vị tha tột độ khi đặt nguồn gốc của họ bên trong mặt trời. Nhưng, xa như nguồn gốc cuối cùng này có thể, và ngay cả khi chúng ta đi xa hơn đến một điểm thuận tiện nào đó giữa các ngôi sao cố định gần hơn, tuy nhiên, so với vô số vô tận của không gian, thì quy trình đầu tiên của chúng ta trong việc khám phá Vũ trụ vẫn là cố định trên một nguồn gốc "gần đây."

Một lần nữa, mối quan hệ của các tọa độ OM và MP (tức là x and y) với vectơ OP là một ví dụ của định luật hình bình hành nổi tiếng, như có thể dễ dàng nhìn thấy (*xem* Hình 8) bằng cách hoàn thành hình bình hành $OMPN$. Ý tưởng về "vectơ" OP, nghĩa là, có độ lớn có hướng, là ý tưởng gốc rễ của khoa học vật

lý. Bất kỳ vật thể chuyển động nào cũng có một độ lớn nhất định của vận tốc theo một hướng nhất định, nghĩa là, vận tốc của nó là một độ lớn có hướng, một vectơ. Lại một lực có độ lớn nhất định và có hướng xác định. Vì vậy, khi trong hình học giải tích các ý tưởng về "nguồn gốc" của "tọa độ" và "vectơ" được giới thiệu, chúng ta đang nghiên cứu các khái niệm trừu tượng tương ứng với các sự kiện cơ bản của thế giới vật chất.

CHƯƠNG X

PHẦN HÌNH NÓN

KHI các nhà hình học Hy Lạp đã cạn kiệt, như họ nghĩ, các tính chất rõ ràng và thú vị hơn của các hình tạo thành từ các đường thẳng và đường tròn, họ chuyển sang nghiên cứu các đường cong khác; và, với bản năng gần như không thể sai lầm của mình là muốn tìm kiếm những điều đáng suy nghĩ, họ chủ yếu cống hiến hết mình cho các tiết diện hình nón, tức là cho các đường cong trong đó các mặt phẳng sẽ cắt các bề mặt của hình nón tròn. Người phải có công phát minh ra nghiên cứu này là Menaechmus (sinh năm 375 TCN và mất năm 325 TCN); ông là học trò của Plato và là một trong những gia sư của Alexander Đại đế. Nhân tiện, Alexander là một ví dụ dễ thấy về lợi ích của học phí tốt, vì một người thầy khác của ông là nhà triết học Aristotle. Chúng ta có thể nghi ngờ rằng Alexander nhận thấy Menaechmus là một giáo viên khá buồn tẻ, vì có liên quan đến việc ông ấy đã yêu cầu rút ngắn phần chứng minh của . Trước yêu cầu này, Menaechmus đã trả lời: "Ở quốc gia có những con đường riêng và thậm chí là đường hoàng gia, nhưng trong hình học chỉ có một con đường cho tất cả." Câu trả lời này chắc chắn là đủ đúng theo nghĩa trong đó nó sẽ được Alexander hiểu ngay lập tức. Nhưng nếu Menaechmus nghĩ rằng không thể rút ngắn các bằng chứng của mình, thì ông đã nhầm to; và hầu hết các nhà toán học hiện đại sẽ chán kinh khủng nếu họ bị buộc phải nghiên cứu các chứng minh Hy Lạp về tính chất của các đường conic. Không có gì minh họa tốt hơn cho việc đạt được sức mạnh thu được từ việc đưa các ý tưởng liên quan vào một ngành khoa học hơn là quan sát quá trình rút ngắn dần dần các bằng chứng đi kèm với sự phát triển của sự phong phú về ý tưởng. Có một loại nhà toán học nào đó luôn khá thiếu kiên nhẫn trong việc trì hoãn các ý tưởng về một chủ đề: anh ta nóng lòng ngay lập tức tiếp tục chứng minh các bài toán "quan trọng". Lịch sử khoa học

hoàn toàn chống lại ông. Có những con đường hoàng gia trong khoa học; nhưng những người đầu tiên giẫm lên chúng là những người có thiên tài và không phải là vua.

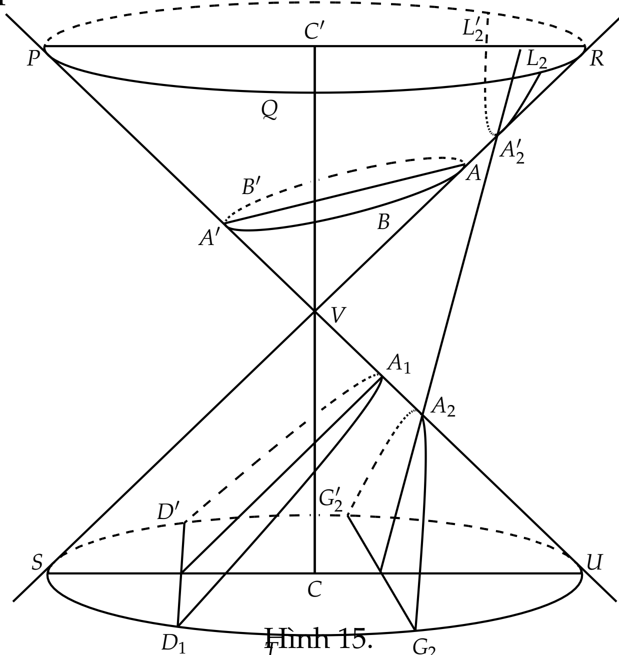
Cách mà các đường cônic lần đầu tiên xuất hiện trước các nhà toán học như sau: hãy nghĩ về một hình nón (*xem* Hình 15), có đỉnh (hoặc điểm) là V, đứng trên một đường tròn cơ sở STU. Ví dụ: bóng đèn hình nón của đèn điện thường là một ví dụ về bề mặt như vậy. Bây giờ hãy để các đường "tạo ra" đi qua V và nằm trên bề mặt đều được tạo ra ngược lại; kết quả là một hình nón kép và PQR là một mặt cắt hình tròn khác ở phía đối diện của V với mặt cắt ngang STU. Trục của hình nón CVC' đi qua tất cả tâm của các đường tròn này và vuông góc với các mặt phẳng song song với nhau của chúng. Trong sơ đồ, các phần của đường cong được cho là nằm sau mặt phẳng của tờ giấy là các đường chấm và các phần trên mặt phẳng hoặc phía trước nó là các đường liên tục. Bây giờ, giả sử hình nón đôi này bị cắt bởi một mặt phẳng không vuông góc với trục CVC', hoặc ít nhất là không nhất thiết phải vuông góc với nó. Sau đó, ba trường hợp có thể phát sinh: —

(1) Mặt phẳng có thể cắt hình nón theo một đường cong hình bầu dục khép kín, chẳng hạn như $ABA'B'$ nằm hoàn toàn trên một trong hai nửa hình nón. Trong trường hợp này, mặt phẳng hoàn toàn không gặp nửa hình nón còn lại. Một đường cong như vậy được gọi là hình elip; nó là một đường cong hình bầu dục. Một trường hợp cụ thể của tiết diện hình nón như vậy là khi mặt phẳng vuông góc với trục CVC', thì tiết diện, chẳng hạn như STU hoặc PQR, là một đường tròn. Do đó, đường tròn là một trường hợp cụ thể của hình elip.

(2) Mặt phẳng có thể song song với một mặt phẳng tiếp tuyến chạm vào hình nón dọc theo một trong các đường "tạo" của nó, chẳng hạn như mặt phẳng của đường cong $D_1A_1D_1'$ trong sơ đồ song song với mặt phẳng tiếp tuyến chạm vào mặt nón dọc theo đường sinh VS; đường cong vẫn bị giới hạn ở một trong các nửa hình nón, nhưng bây giờ nó không phải là một đường cong hình

bầu dục khép kín, nó kéo dài vô tận miễn là các đường sinh của nửa hình nón được tạo ra từ đỉnh. Phần hình nón như vậy được gọi là parabol.

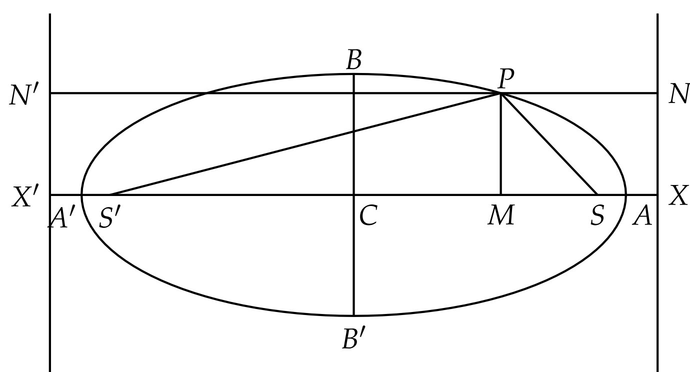
(3) Mặt phẳng có thể cắt cả hai nửa hình nón, để đường cong hoàn chỉnh bao gồm hai phần tách rời, hoặc "nhánh" như cách gọi của chúng, trường hợp này được minh họa bằng hai nhánh $G_2A_2G_2'$ và $L_2A_2'L_2'$ cùng nhau tạo thành đường cong. Không có nhánh nào bị đóng, mỗi nhánh trải ra vô tận khi hai nửa hình nón được kéo dài ra khỏi đỉnh. Phần hình nón như vậy được gọi là một hyperbola.



Hình 15.

Theo đó, có ba loại mặt cắt hình nón, đó là hình elip, hình parabol và hình hyperbol. Dễ thấy rằng, theo một nghĩa nào đó, parabol là các trường hợp giới hạn nằm giữa elip và hyperbol. Chúng tạo thành một loại đặc biệt hơn và phải đáp ứng một điều kiện cụ thể hơn. Ba cái tên này rõ ràng là do Apollonius of Perga (sinh khoảng 260 TCN, và mất khoảng 200 TCN), người đã viết một chuyên luận có hệ thống về mặt cắt hình nón mà vẫn là công trình tiêu chuẩn cho đến thế kỷ 16 thế kỷ.

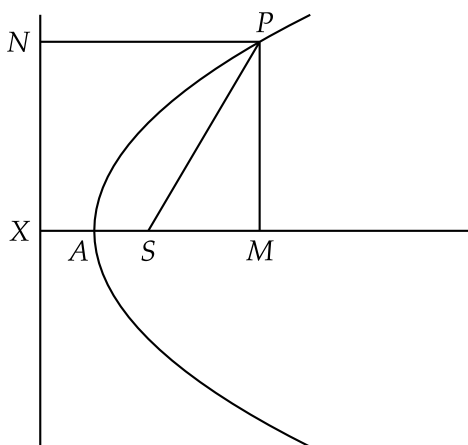
Rõ ràng là ngay lập tức khó xử và khó khăn như thế nào khi nghiên cứu các tính chất của những đường cong này đối với các nhà hình học Hy Lạp. Các đường cong là các đường cong phẳng, tuy nhiên việc nghiên cứu chúng liên quan đến việc vẽ phối cảnh của một hình khối. Vì vậy, trong sơ đồ đưa ra ở trên, thực tế chúng ta không vẽ các đường phụ và hình này vẫn đủ phức tạp. Các đường cong là các đường cong phẳng và rõ ràng là chúng ta có thể xác định chúng mà không cần vượt ra ngoài mặt phẳng thành



Hình 16.

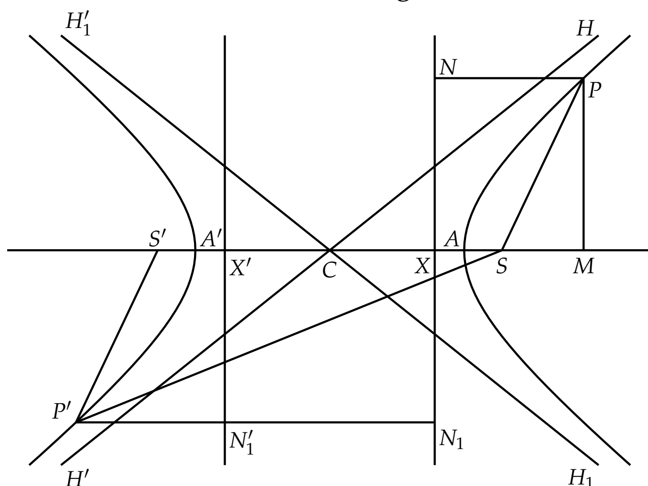
một hình khối. Đồng thời, giống như trong định nghĩa "solid" , có một phương pháp định nghĩa thống nhất—cụ thể là, thiết diện của hình nón bởi một mặt phẳng—tạo ra ba trường hợp, vì vậy trong bất kỳ định nghĩa "mặt phẳng" nào cũng nên có một phương pháp thủ tục thống nhất rơi vào ba trường hợp. Hình dạng của chúng khi được vẽ trên mặt phẳng của chúng là hình dạng của các đường cong trong ba Hình 16, 17 và 18. Các điểm A and A' trong các hình được gọi là các đỉnh và đường thẳng AA' trục chính. Cần lưu ý rằng một hình parabol (*xem* Hình 17) chỉ có một đỉnh. Apollonius đã chứng minh* rằng tỷ lệ của PM^2 so với $AMMA'$, nghĩa là $\left(\dfrac{PM^2}{AMMA'}\right)$ không đổi đối với cả hình elip và hyperbola (Hình 16 và 18), đồng thời tỷ lệ của PM^2 đến AM

Xem Ball, *loc. cit.*, đối với tài khoản này của Apollonius và Pappus.



Hình 17.

không đổi đối với parabol của Hình 17 ; và hầu hết công việc của ông dựa trên thực tế này. Rõ ràng là chúng tôi đang tiến tới định nghĩa thống nhất mong muốn không nằm ngoài mặt phẳng; nhưng chưa thực sự đạt đến sự thống nhất.



Hình 18.

Trong Hình 16 và 18, hai điểm, S và S', sẽ được đánh dấu, và trong Hình 17, một điểm, S. Đây là *tiêu điểm* của các đường cong và là những điểm có tầm quan trọng lớn nhất. Apollonius biết rằng đối với một hình elip, tổng của SP và $S'P$ (tức là $SP + S'P$)

không đổi khi P di chuyển trên đường cong và bằng AA'. Tương tự như vậy đối với một hyperbola, hiệu $S'P - SP$ là hằng số và bằng AA' khi P nằm trên một nhánh và hiệu $SP' - S'P'$ là hằng số và bằng nhau thành AA' khi P' ở nhánh khác. Nhưng dường như không có điểm tương ứng nào tồn tại đối với parabola.

Cuối cùng 500 năm sau, nhà hình học vĩ đại cuối cùng của Hy Lạp, Pappus của Alexandria, đã phát hiện ra bí mật cuối cùng giúp hoàn thành dòng suy nghĩ này. Trong các Hình 16 và 18 sẽ có hai dòng, XN và $X'N'$, và trong Hình 17, một dòng, XN. Đây là các đường trực tiếp của các đường cong, hai đường cho hình elip và hyperbola, và một đường cho parabol. Mỗi directrix tương ứng với tiêu điểm gần hơn của nó. Thuộc tính đặc trưng của một tiêu điểm, S, và directrix tương ứng của nó, XN, đối với bất kỳ một trong ba loại đường cong, đó là tỷ lệ SP to PN $\left(\textit{tức là } \dfrac{SP}{PN}\right)$ là hằng số, trong đó PN là đường vuông góc trên đường chuẩn từ P, và P là bất kỳ điểm nào trên đường cong. Ở đây, cuối cùng chúng ta đã tìm thấy thuộc tính mong muốn của các đường cong không yêu cầu chúng ta rời khỏi mặt phẳng và được phát biểu thống nhất cho cả ba đường cong. Đối với hình elip, tỷ lệ* nhỏ hơn 1, đối với hình parabol, tỷ lệ này bằng 1, và đối với hyperbola nó lớn hơn 1.

Khi Pappus kết thúc cuộc điều tra của mình, chắc hẳn anh ấy đã cảm thấy rằng, ngoài những phần mở rộng nhỏ, chủ đề thực tế đã cạn kiệt; và nếu ông có thể thấy trước lịch sử khoa học trong hơn một nghìn năm, thì điều đó sẽ khẳng định niềm tin của ông. Tuy nhiên, trên thực tế, những ý tưởng thực sự hiệu quả liên quan đến nhánh toán học này thậm chí còn chưa được đề cập đến, và không ai đoán được những ứng dụng cực kỳ quan trọng của chúng trong tự nhiên. Không có lời cảnh báo ấn tượng nào có thể được đưa ra cho những ai muốn giới hạn kiến thức và nghiên cứu trong phạm vi những gì có vẻ hữu ích, hơn là sự phản ánh rằng các mặt cắt hình nón đã được nghiên cứu trong

*Xem Ghi chú B, p. 163.

1.800 năm chỉ như một khoa học trừu tượng, mà không nghĩ đến bất kỳ lợi ích nào khác ngoài việc đáp ứng nhu cầu khao khát kiến thức của các nhà toán học, và sau đó khi kết thúc thời gian dài nghiên cứu trừu tượng này, chúng được coi là chìa khóa cần thiết để đạt được kiến thức về một trong những định luật quan trọng nhất của thiên nhiên.

Trong khi đó, nghiên cứu hoàn toàn khác biệt về thiên văn học đã được tiến hành. nhà thiên văn học vĩ đại người Hy Lạp Ptolemy (mất năm 168 SCN) đã xuất bản chuyên luận tiêu chuẩn của mình về chủ đề này tại Đại học Alexandria, giải thích các chuyển động biểu kiến giữa các ngôi sao cố định của mặt trời và các hành tinh bằng quan niệm về trái đất đứng yên và mặt trời cùng các hành tinh quay xung quanh nó. Trong 1300 năm tiếp theo, số lượng và độ chính xác của các quan sát thiên văn tăng lên, kết quả là việc mô tả chuyển động của các hành tinh theo giả thuyết của Ptolemy ngày càng phức tạp hơn. Copernicus (sinh 1473 SCN và mất 1543 SCN) đã chỉ ra rằng chuyển động của các thiên thể này có thể được giải thích theo cách đơn giản hơn nếu giả sử mặt trời đứng yên, trái đất và các hành tinh nằm yên. được quan niệm là chuyển động quanh nó. Tuy nhiên, ông vẫn coi những chuyển động này về cơ bản là chuyển động tròn, mặc dù đã được sửa đổi bởi một tập hợp các hiệu chỉnh nhỏ được đặt chồng lên một cách tùy tiện trên các chuyển động tròn sơ cấp. Vì vậy, vấn đề vẫn tồn tại khi Kepler được sinh ra tại Stuttgart ở Đức vào năm 1571 SCN. Có hai ngành khoa học, đó là hình học của các mặt cắt hình nón và khoa thiên văn học, cả hai ngành đã được nghiên cứu từ thời xa xưa mà không nghi ngờ gì về bất kỳ mối liên hệ nào giữa hai ngành này. Kepler là một nhà thiên văn học, nhưng ông cũng là một nhà hình học có năng lực, và về chủ đề tiết diện hình nón, ông đã có những ý tưởng trước thời đại của mình. Ông chỉ là một trong nhiều ví dụ về sự sai lầm của ý tưởng rằng sự thành công trong nghiên cứu khoa học đòi hỏi sự chuyên tâm độc quyền vào một lĩnh vực nghiên cứu hẹp. Những ý tưởng mới lạ có nhiều khả năng nảy sinh từ một loại tri thức

khác thường—không nhất thiết phải từ tri thức rộng lớn, mà từ một quan niệm thấu đáo về các phương pháp và ý tưởng của các dòng tư tưởng khác biệt. Cần nhớ rằng Charles Darwin đã được giúp đi đến quan niệm của ông về quy luật tiến hóa bằng cách đọc *Bài luận về Dân số* nổi tiếng của Malthus, một tác phẩm đề cập đến một chủ đề khác- –ít nhất, như lúc đó người ta đã nghĩ.

Kepler đã đưa ra ba định luật về chuyển động của các hành tinh , hai định luật đầu tiên vào năm 1609 và định luật thứ ba mười năm sau đó. Chúng như sau:

(1) Quỹ đạo của các hành tinh là hình elip, lấy mặt trời làm tiêu điểm.

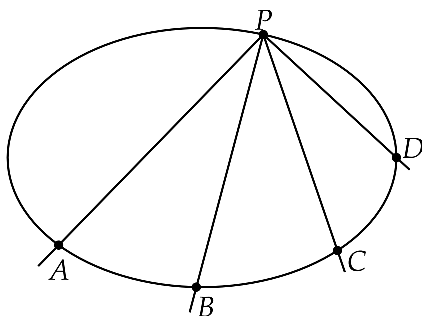
(2) Khi một hành tinh chuyển động trên quỹ đạo của nó, vectơ bán kính từ mặt trời đến hành tinh quét những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau.

(3) Bình phương chu kỳ của một số hành tinh tỉ lệ với lập phương của các trục chính của chúng.

Những quy luật này được chứng minh chỉ là một giai đoạn hướng tới sự phát triển cơ bản hơn của các ý tưởng. Newton (sinh năm 1642 SCN và mất 1727 SCN) đã nghĩ ra ý tưởng về lực hấp dẫn phổ quát, cụ thể là hai mảnh vật chất bất kỳ hút nhau với một lực tỷ lệ thuận với tích khối lượng của chúng và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng. Định luật tổng quát sâu rộng này, cùng với ba định luật chuyển động mà ông đã đưa vào hình dạng chung cuối cùng của chúng, đã chứng tỏ là đủ để giải thích mọi hiện tượng thiên văn, kể cả các định luật của Kepler, và đã hình thành cơ sở của vật lý hiện đại. Trong số những thứ khác, ông đã chứng minh rằng sao chổi có thể di chuyển theo hình elip rất dài, hoặc theo đường parabol, hoặc theo đường hypebol, gần giống như parabol. Tất nhiên, sao chổi quay trở lại—chẳng hạn như sao chổi Halley—phải chuyển động trong hình elip. Nhưng bước thiết yếu trong việc chứng minh định luật hấp dẫn, và ngay cả trong gợi ý về khái niệm ban đầu của nó, là việc xác minh các định luật của Kepler liên kết chuyển động của các hành tinh với

lý thuyết về mặt cắt hình nón.

Từ thế kỷ XVII trở đi, lý thuyết trừu tượng về các đường cong đã góp mặt trong thời kỳ phục hưng kép của hình học do sự ra đời của hình học tọa độ và hình học xạ ảnh. Trong hình học xạ ảnh , các ý tưởng cơ bản tập hợp xung quanh việc xem xét các tập hợp (hoặc bút chì, khi chúng được gọi là) các đường thẳng đi qua một điểm chung (đỉnh của ' 'bút chì"). Bây giờ (*xem* Hình 19) nếu A, B, C, D, là bốn điểm cố định bất kỳ trên đường cônic và P là một điểm thay đổi trên đường cong, bút chì của các đường PA, PB, PC và PD, có một thuộc tính đặc biệt, được gọi là hằng



Hình 19.

số tỷ lệ chéo của nó. Ở đây sẽ đủ để nói rằng tỷ lệ chéo là một ý tưởng cơ bản trong hình học xạ ảnh. Đối với hình học xạ ảnh, đây thực sự là định nghĩa của các đường cong, hoặc một số thuộc tính tương tự thực sự tương đương với nó. sẽ được xem trong quá trình nghiên cứu qua nhiều thời đại, chúng ta đã rời xa ý tưởng ban đầu cũ kỹ về các mặt cắt của hình nón tròn bao xa. Bây giờ chúng ta biết rằng người Hy Lạp đã nắm giữ một tài sản nhỏ có tầm quan trọng tương đối nhỏ; mặc dù nhờ một sự may mắn thần thánh nào đó, bản thân các đường cong đã xứng đáng nhận được mọi sự chú ý dành cho chúng. Sự không quan trọng này của ý tưởng "phần" hiện được đánh dấu trong cụm từ toán học thông thường bằng cách loại bỏ từ này khỏi tên của chúng. Thông thường, giờ đây chúng chỉ được đặt tên là "conics" thay

vì "mặt cắt conic".

Cuối cùng, chúng ta quay lại vấn đề tại mà chúng ta đã để lại hình học tọa độ trong chương trước. Chúng tôi đã hỏi loại *loci* tương ứng với dạng đại số tổng quát $ax + by = c$ là gì, và đã phát hiện ra rằng đó là lớp các đường thẳng trong mặt phẳng. Chúng ta đã thấy rằng mọi đường thẳng đều có một phương trình dạng này và mọi phương trình dạng này đều tương ứng với một đường thẳng. Bây giờ chúng ta muốn chuyển sang dạng tổng quát tiếp theo của các dạng đại số. Điều này rõ ràng có được bằng cách đưa ra các thuật ngữ liên quan đến x^2 and xy and y^2. Như vậy dạng tổng quát mới phải được viết:—

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Điều này thể hiện điều gì? Câu trả lời là rằng (khi nó đại diện cho bất kỳ quỹ tích nào), nó luôn đại diện cho một đường cônic và hơn nữa, phương trình của mọi đường cônic luôn có thể được đưa vào hình này. Việc phân biệt các loại đường cônic cụ thể được đưa ra bởi dạng phương trình này là rất dễ dàng. Nó hoàn toàn phụ thuộc vào việc xem xét $ab - h^2$, trong đó a, b, và h, là các "hằng số" như đã viết ở trên. Nếu $ab - h^2$ là một số dương, thì đường cong là hình elip; nếu $ab - h^2 = 0$, đường cong là một parabol: và nếu $ab - h^2$ là một số âm, thì đường cong là một hyperbola.

Ví dụ: đặt $a = b = 1, h = g = f = 0, c = -4$. Sau đó, chúng ta nhận được phương trình $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Dễ dàng chứng minh rằng đây là phương trình của một đường tròn có tâm ở gốc tọa độ và bán kính là 2 đơn vị độ dài. Bây giờ $ab - h^2$ trở thành $1 \times 1 - 0^2$, nghĩa là, 1, và do đó dương. Do đó hình tròn là một trường hợp cụ thể của hình elip, như nó phải vậy. Tổng quát hóa, phương trình của bất kỳ đường tròn nào có thể được đặt ở dạng $a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$. Do đó $ab - h^2$ trở thành $a^2 - 0$, nghĩa là, a^2, nhất thiết phải dương. Theo đó tất cả các đường tròn thỏa mãn điều kiện cho hình elip. Dạng tổng quát của phương trình

parabol là

$$(dx + ey)^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

sao cho các số hạng của bậc hai, như chúng được gọi là , có thể được viết dưới dạng một số chính phương. Để bình phương ra, chúng tôi nhận được

$$d^2x^2 + 2dexy + e^2y^2 + 2gx + 2fy + c;$$

sao cho khi so sánh $a = d^2$, $h = de$, $b = e^2$, và do đó $ab - h^2 = d^2e^2 - (de)^2 = 0$. Do đó điều kiện cần tự động được thỏa mãn. Phương trình $2xy - 4 = 0$, trong đó $a = b = g = f = 0$, $h = 1$, $c = -4$, đại diện cho một hyperbola. Đối với điều kiện $ab - h^2$ trở thành $0 - 1^2$, nghĩa là, -1, là số âm.

giới hạn, được đưa ra bằng cách nói rằng, *khi phương trình tổng quát biểu thị quỹ tích bất kỳ*, nó biểu thị một mặt cắt hình nón, là cần thiết, bởi vì một số trường hợp cụ thể của phương trình tổng quát không biểu thị quỹ tích thực . Ví dụ: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ không thể thỏa mãn bởi không có giá trị thực nào của x and y. Người ta thường nói rằng quỹ tích bây giờ là quỹ tích gồm các điểm ảo. Nhưng ý tưởng về các điểm tưởng tượng trong hình học thực sự là một ý tưởng hết sức phức tạp, mà bây giờ chúng ta sẽ không đi sâu vào.

Một số trường hợp ngoại lệ được đưa vào dạng tổng quát của phương trình mà có thể không được nhận ra ngay là các phần hình nón. Bằng cách chọn đúng các hằng số, phương trình có thể được biểu diễn bằng hai đường thẳng. Giờ đây, hai đường thẳng cắt nhau có thể được cho là xuất phát từ ý tưởng của người Hy Lạp về mặt cắt hình nón. Vì, bằng cách tham khảo hình của hình nón kép ở trên, ta sẽ thấy rằng một số mặt phẳng đi qua đỉnh V, sẽ cắt hình nón theo một cặp đường thẳng cắt nhau tại V . Có thể kể đến trường hợp hai đường thẳng song song bằng cách coi hình trụ tròn là một trường hợp riêng của hình nón. Khi đó một mặt phẳng cắt nó và song song với trục của nó sẽ cắt nó thành hai đường thẳng song song. Nhưng dù sao đi nữa, dù người Hy Lạp cổ đại có cho phép gọi những trường hợp đặc biệt này là các

phần cônic hay không, thì chúng chắc chắn được bao gồm trong số các đường cong được biểu diễn bởi dạng đại số tổng quát cấp hai. Thực tế này là đáng chú ý; vì đặc điểm của toán học hiện đại là bao gồm trong số các dạng tổng quát tất cả các loại trường hợp cụ thể mà trước đây sẽ được xử lý đặc biệt. Điều này là do nó theo đuổi tính tổng quát.

CHƯƠNG XI

HÀM SỐ

VIỆC sử dụng toán học của thuật ngữ hàm cũng đã được áp dụng trong cuộc sống chung. Ví dụ, "Tính nóng nảy của anh ấy là một chức năng của quá trình tiêu hóa của anh ấy," sử dụng thuật ngữ này một cách chính xác theo nghĩa toán học này. Điều đó có nghĩa là bạn có thể chỉ định một quy tắc sẽ cho bạn biết tính khí của anh ấy sẽ như thế nào khi bạn biết quá trình tiêu hóa của anh ấy đang hoạt động như thế nào. Vì vậy, ý tưởng về một "hàm số" là đủ đơn giản, chúng ta chỉ cần xem cách nó được áp dụng trong toán học cho các số biến. Trước hết chúng ta hãy nghĩ về một số ví dụ cụ thể: Nếu một đoàn tàu đang chạy với tốc độ 20 dặm một giờ, thì quãng đường (s dặm) đi sau một số giờ bất kỳ, chẳng hạn như t, được cho bởi $s = 20 \times t$; và s được gọi là một hàm của t. Ngoài ra $20 \times t$ là hàm của t mà s đồng nhất với nó. Nếu John hơn Thomas một tuổi, thì khi Thomas ở bất kỳ độ tuổi nào là x năm, thì tuổi của John (y năm) là $y = x + 1$; và y là một hàm của x, cụ thể là, là hàm $x + 1$.

Trong những ví dụ này t và x được gọi là "đối số" của các hàm mà chúng xuất hiện trong đó. Do đó t là đối số của hàm $20 \times t$ và x là đối số của hàm $x + 1$. Nếu $s = 20 \times t$ và $y = x + 1$, thì s và y được gọi là "giá trị" của các hàm $20 \times t$ và $x + 1$ tương ứng.

Bây giờ đến trường hợp tổng quát, chúng ta có thể định nghĩa một hàm trong toán học là một mối tương quan giữa hai số biến, được gọi tương ứng là đối số và giá trị của hàm, sao cho bất kỳ giá trị nào được gán cho "đối số của hàm" thì "giá trị của hàm" được xác định chắc chắn (tức là duy nhất). Điều ngược lại không nhất thiết đúng, cụ thể là khi giá trị của hàm được xác định thì đối số cũng được xác định duy nhất. Các hàm khác của đối số x là $y = x^2$, $y = 2x^2 + 3x + 1$, $y = x$, $y = \log x$, $y = \sin x$. Hai chức năng cuối cùng của nhóm này sẽ dễ dàng nhận ra bởi những

người hiểu một chút về đại số và lượng giác. Bây giờ không đáng để trì hoãn việc giải thích chúng, vì chúng chỉ được trích dẫn để làm ví dụ.

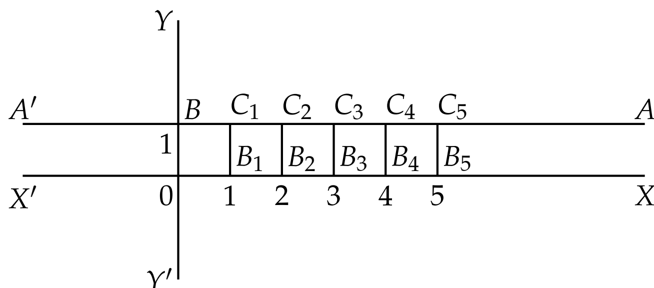
Cho đến thời điểm này, mặc dù chúng ta đã định nghĩa hàm nói chung là gì, nhưng chúng ta mới chỉ đề cập đến một loạt các hàm đặc biệt. Nhưng toán học, đúng với các phương pháp thủ tục chung của nó, tượng trưng cho ý tưởng chung của bất kỳ chức năng nào. Nó thực hiện điều này bằng cách viết $F(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $\phi(x)$, ..., cho bất kỳ hàm nào của x, trong đó đối số x được đặt trong dấu ngoặc đơn và một số chữ cái như F, f, g, ϕ, v.v., được thêm tiền tố vào khung để đứng cho chức năng. Ký hiệu này có khiếm khuyết của nó. Do đó, rõ ràng là nó xung đột với quy ước rằng các chữ cái đơn lẻ sẽ biểu thị các số thay đổi; vì ở đây F, f, g, ϕ, etc., được thêm tiền tố vào dấu ngoặc đơn cho các hàm biến. Thật dễ dàng để đưa ra những ví dụ mà chúng ta chỉ có thể tin tưởng vào lẽ thường và bối cảnh để xem ý nghĩa của nó. Một cách để tránh nhầm lẫn là sử dụng các chữ cái Hy Lạp (*ví dụ* ϕ như trên) cho các hàm; một cách khác là giữ nguyên f and F (chữ cái đầu tiên của hàm) cho chữ cái chức năng và, nếu các hàm biến khác phải được ký hiệu, hãy lấy một chữ cái liền kề như g.

Với những lời giải thích và cảnh báo này, chúng ta viết $y = f(x)$, để biểu thị rằng y là giá trị của một số hàm không xác định của đối số x; trong đó $f(x)$ có thể đại diện cho bất kỳ thứ gì chẳng hạn như $x+1$, x^2-2x+1, $\sin x$, $\log x$ hoặc chỉ đơn thuần là x chính nó. Điểm cốt yếu là khi x được cho trước, thì y do đó được xác định một cách chắc chắn. Điều quan trọng là phải khá rõ ràng về tính tổng quát của ý tưởng này. Vì vậy, trong $y = f(x)$, chúng ta có thể xác định, nếu chúng ta chọn, $f(x)$ có nghĩa là khi x là một số nguyên, thì $f(x)$ là 0, và khi x có bất kỳ giá trị nào khác không, $f(x)$ is 1. Theo đó, đặt $y = f(x)$, với lựa chọn này cho ý nghĩa của f, y là 0 hoặc 1 tùy theo giá trị của x là tích phân hay không. Do đó, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(\frac{2}{3}) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 1$, v.v. trên. Sự lựa chọn này cho ý nghĩa của $f(x)$ mang lại một chức năng hoàn toàn tốt của đối số x theo định nghĩa chung của một

hàm.

Một hàm, suy cho cùng chỉ là một loại tương quan giữa hai biến, được biểu diễn giống như các tương quan khác bằng một biểu đồ, có hiệu lực bằng các phương pháp hình học tọa độ. Ví dụ: Hình 2 trong Chương II. là đồ thị của hàm số $\frac{1}{v}$ trong đó v là đối số và p giá trị của hàm. Trong trường hợp này, đồ thị chỉ được vẽ cho các giá trị dương của v, là những giá trị duy nhất có bất kỳ ý nghĩa nào đối với ứng dụng vật lý được xem xét trong chương đó. Một lần nữa trong Hình 14 của Chương IX. toàn bộ chiều dài của đoạn thẳng AB, không giới hạn theo cả hai hướng, là đồ thị của hàm số $x+1$, trong đó x là đối số và y là giá trị của hàm; và trong cùng một hình, dòng không giới hạn A_1B là đồ thị của hàm số $1-x$ và dòng LOL' là đồ thị của hàm số x, x là đối số và y giá trị của hàm.

Các hàm này, được biểu thị bằng công thức đại số đơn giản, được điều chỉnh để biểu diễn bằng đồ thị. Nhưng đối với một số hàm , cách trình bày này sẽ rất dễ gây hiểu lầm nếu không có lời giải thích chi tiết hoặc thậm chí có thể là không thể. Vì vậy, hãy xem xét hàm được đề cập ở trên, hàm này có giá trị 1 cho tất cả các giá trị của đối số x, ngoại trừ những giá trị nguyên, *ví dụ* except for $x=0$, $x=1$, $x=2$, v.v., khi nó có giá trị 0. Hình thức của nó trên biểu đồ sẽ là hình thức của đường thẳng ABA' được vẽ song song với trục XOX' và cách nó một khoảng 1 đơn vị độ



Hình 20.

dài. Nhưng các điểm, B, C_1, C_2, C_3, C_4, v.v., tương ứng với các giá

trị 0, 1, 2, 3, 4, etc., của đối số x, sẽ được bỏ qua và thay vào đó là các điểm O, B_1, B_2, B_3, B_4, v.v., trên trục OX, sẽ được lấy. Thật dễ dàng tìm thấy các chức năng mà biểu diễn đồ họa không chỉ bất tiện mà còn không thể thực hiện được. Các hàm không liên quan đến đồ thị rất quan trọng trong toán học cao cấp, nhưng chúng ta không cần quan tâm thêm về chúng ở đây.

Sự phân chia quan trọng nhất giữa các hàm là sự phân chia giữa các hàm liên tục và không liên tục. Một hàm liên tục khi giá trị của nó chỉ thay đổi dần dần theo sự thay đổi dần dần của đối số và không liên tục khi nó có thể thay đổi giá trị của mình bằng các bước nhảy đột ngột. Do đó, hai hàm số $x + 1$ và $1 - x$, có đồ thị được biểu diễn dưới dạng các đường thẳng trong Hình 14 của Chương IX., là các hàm số liên tục và hàm số này cũng vậy $\frac{1}{v}$, được mô tả trong Chương II., nếu chúng ta chỉ nghĩ đến các giá trị dương của v. Nhưng hàm được mô tả trong Hình 20 của chương này không liên tục vì tại các giá trị $x = 1$, $x = 2$, v.v., của đối số, giá trị của nó tạo ra các bước nhảy đột ngột.

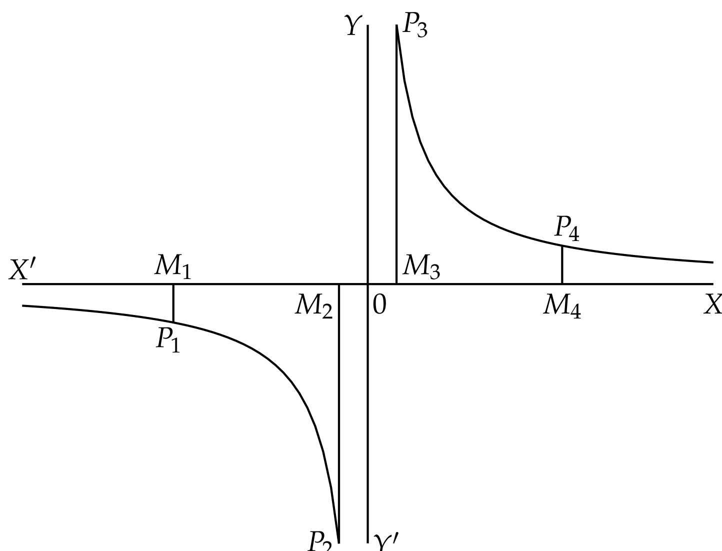
Chúng ta hãy nghĩ về một số ví dụ về các chức năng được trình bày cho chúng ta trong tự nhiên, để chúng ta hiểu được ý nghĩa thực sự của tính liên tục và gián đoạn. Hãy xem xét một chuyến tàu trong hành trình dọc theo một tuyến đường sắt, chẳng hạn như từ Ga Euston, ga cuối ở London của Đường sắt London và Tây Bắc. Dọc theo hàng là các trạm Bletchley và Rugby. Gọi t là số giờ tàu đã đi trên hành trình từ Euston, và s là số dặm đã đi qua. Khi đó s là một hàm của t, *tức là* là giá trị biến tương ứng với đối số biến t. Nếu chúng tôi biết hoàn cảnh chạy tàu, chúng tôi sẽ biết s ngay khi có bất kỳ giá trị đặc biệt nào của t. Bây giờ, ngoài phép màu ra, chúng ta có thể tự tin giả định rằng s là một hàm liên tục của t. Không thể để xảy ra trường hợp ngẫu nhiên là chúng ta có thể theo dõi đoàn tàu liên tục từ Euston đến Bletchley, và sau đó, không có bất kỳ thời gian can thiệp nào, dù ngắn đến đâu, nó sẽ xuất hiện tại Rugby. Ý tưởng này quá tuyệt vời để đưa vào tính toán của chúng tôi: nó dự tính những khả năng không thể tìm thấy bên ngoài *Arabian Nights*; và ngay cả

trong những câu chuyện đó, sự gián đoạn hoàn toàn của chuyển động hầu như không đi vào trí tưởng tượng, họ không dám đánh thuế sự cả tin của chúng ta bằng bất cứ điều gì ngoài tốc độ rất bất thường. Nhưng tốc độ bất thường không mâu thuẫn với định luật vĩ đại về tính liên tục của chuyển động dường như tồn tại trong tự nhiên. Như vậy ánh sáng di chuyển với tốc độ khoảng 190.000 dặm/giây và đến với chúng ta từ mặt trời trong bảy hoặc tám phút; nhưng, bất chấp tốc độ này, quãng đường đi được của nó luôn là một hàm liên tục của thời gian.

Chúng ta không hoàn toàn rõ ràng rằng vận tốc của một vật thể luôn luôn là một hàm liên tục của thời gian. Xét đoàn tàu tại bất kỳ thời điểm nào t: nó đang chuyển động với một vận tốc xác định nào đó, chẳng hạn v dặm trên giờ, trong đó v bằng không khi đoàn tàu đứng yên trong một nhà ga và âm khi xe lửa đang lùi. Giờ đây, chúng tôi sẵn sàng cho phép v không thể đột ngột thay đổi giá trị của nó đối với một đoàn tàu lớn, nặng. Con tàu chắc chắn không thể chạy với tốc độ 40 dặm một giờ từ 11 giờ 45 phút sáng cho đến trưa, rồi đột ngột, không chút chậm trễ, bắt đầu chạy với tốc độ 50 đô la dặm một giờ. Chúng tôi ngay lập tức thừa nhận rằng sự thay đổi vận tốc sẽ là một quá trình dần dần. Nhưng còn những cú đánh bất ngờ với cường độ thích hợp thì sao? Giả sử hai đoàn tàu va vào nhau; hoặc, để lấy những vật thể nhỏ hơn, giả sử một người đàn ông đá bóng. Theo cảm nhận của chúng ta, chắc chắn là quả bóng bắt đầu chuyển động đột ngột. Vì vậy, trong trường hợp vận tốc, các giác quan của chúng ta không phản đối ý tưởng cho rằng nó là một chức năng không liên tục của thời gian, như chúng đã phản đối ý tưởng về đoàn tàu được vận chuyển tức thời từ Bletchley đến Rugby. Trên thực tế, nếu các định luật về chuyển động, với quan niệm về khối lượng của chúng, là đúng, thì không có cái gọi là vận tốc không liên tục trong tự nhiên. Theo họ, bất cứ thứ gì xuất hiện trước giác quan của chúng ta là sự thay đổi vận tốc không liên tục phải được coi là một trường hợp thay đổi dần dần, quá nhanh để chúng ta có thể cảm nhận được. Tuy nhiên, sẽ là hấp tấp nếu vội vàng đi vào

khái quát hóa rằng không có hàm gián đoạn nào được trình bày cho chúng ta trong tự nhiên. Một người đàn ông tin rằng độ cao trung bình của vùng đất so với mực nước biển giữa London và Paris là một hàm liên tục của khoảng cách từ London, đã đi bộ vào ban đêm trên Vách đá của Shakespeare bên Dover để chiêm ngưỡng Dải Ngân hà, sẽ chết trước khi ông có thời gian sắp xếp lại các ý tưởng của mình về sự cần thiết của sự thận trọng trong các kết luận khoa học.

Rất dễ dàng để tìm một hàm không liên tục, ngay cả khi chúng ta tự giới hạn mình trong đơn giản nhất của công thức đại sốæ.



Hình 21.

Ví dụ: lấy hàm $y = \frac{1}{x}$, mà chúng ta đã xem xét ở dạng $p = \frac{1}{v}$, trong đó v được giới hạn ở các giá trị dương . Nhưng bây giờ hãy để x có bất kỳ giá trị nào, dương hay âm. Đồ thị của hàm số được hiển thị trong Hình 21. Giả sử x thay đổi liên tục từ một giá trị âm lớn thông qua một tập hợp các giá trị âm giảm dần về số lượng cho đến 0, và sau đó thông qua một chuỗi các giá trị dương tăng dần. Theo đó, nếu một điểm chuyển động, M, đại diện cho x trên XOX', thì M bắt đầu ở cực bên trái của trục XOX' và liên tiếp di chuyển qua M_1, M_2, M_3, M_4, v.v. Các điểm tương

ứng trên hàm là P_1, P_2, P_3, P_4, v.v. Dễ dàng thấy rằng có một điểm gián đoạn tại $x = 0$, tức là tại gốc tọa độ O. Vì giá trị của hàm ở phía âm (trái) của gốc tọa độ trở nên lớn vô tận nhưng âm và hàm xuất hiện lại ở phía dương (phải) là lớn vô tận nhưng dương. Do đó, dù chúng ta lấy độ dài M_2M_3 nhỏ đến đâu, vẫn có một bước nhảy hữu hạn giữa các giá trị của hàm tại M_2 và M_3. Thật vậy, trường hợp này có một điểm đặc biệt là chúng ta lấy độ dài giữa M_2 và M_3 càng nhỏ, miễn là chúng bao quanh gốc tọa độ, thì bước nhảy giá trị của hàm giữa chúng càng lớn . Đồ thị này đưa ra, điều cũng rõ ràng trong Hình 20 của chương này, rằng đối với nhiều hàm số, sự không liên tục chỉ xảy ra tại các điểm cô lập, do đó, bằng cách hạn chế các giá trị của đối số, chúng ta thu được một hàm liên tục cho các giá trị còn lại này. Vì vậy, rõ ràng từ Hình 21 rằng trong $y = \frac{1}{x}$, nếu chúng ta chỉ giữ các giá trị dương và loại bỏ gốc tọa độ, chúng ta sẽ nhận được một chuỗi liên tục hàm số. Tương tự như vậy, cùng một hàm, nếu chúng ta chỉ giữ các giá trị âm, không bao gồm gốc tọa độ, thì liên tục. Một lần nữa, hàm số được vẽ trong Hình 20 liên tục giữa B và C_1, và giữa C_1 và C_2, và giữa C_2 và C_3, v.v., luôn luôn trong từng trường hợp ngoại trừ các điểm kết thúc. Tuy nhiên, dễ dàng tìm thấy các hàm sao cho sự gián đoạn của chúng xảy ra tại mọi điểm. Ví dụ: hãy xem xét một hàm $f(x)$, sao cho khi x là bất kỳ số phân số nào thì $f(x) = 1$, và khi x là bất kỳ số nào không thể so sánh được thì $f(x) = 2$. Hàm này không liên tục tại mọi điểm.

Cuối cùng, chúng ta sẽ xem xét kỹ hơn một chút định nghĩa về tính liên tục được đưa ra ở trên. Ta đã nói rằng một hàm là liên tục khi giá trị của nó chỉ thay đổi dần dần theo sự thay đổi dần dần của đối số và không liên tục khi nó có thể thay đổi giá trị của mình bằng những bước nhảy đột ngột. Đây chính xác là loại định nghĩa đã làm hài lòng các bậc tiền bối toán học của chúng ta và không còn làm hài lòng các nhà toán học hiện đại nữa. Thật đáng để dành thời gian cho nó; vì khi chúng ta hiểu được những phản đối hiện đại đối với nó, chúng ta sẽ đi một chặng đường dài hướng tới sự hiểu biết về tinh thần của toán học hiện đại. Toàn bộ

sự khác biệt của giữa toán học cũ hơn và toán học mới hơn nằm ở chỗ các thuật ngữ mơ hồ nửa ẩn dụ như "dần dần" không còn được chấp nhận trong các phát biểu chính xác của nó nữa. Toán học hiện đại sẽ chỉ thừa nhận những phát biểu, định nghĩa và lập luận chỉ sử dụng một vài ý tưởng đơn giản về số lượng, độ lớn và các biến số mà khoa học được hình thành. Trong hai số, một số có thể lớn hơn hoặc nhỏ hơn số kia; và cái này có thể là bội số của cái kia; nhưng không có quan hệ "dần dần" giữa hai con số, và do đó thuật ngữ này không được chấp nhận. Bây giờ điều này thoạt nhìn có vẻ là một phương pháp sư phạm tuyệt vời. Đối với khoản phí này có hai câu trả lời. Đầu tiên, trong nửa đầu thế kỷ 19, một số nhà toán học vĩ đại, đặc biệt là Abel ở Thụy Điển, và Weierstrass ở Đức, đã phát hiện ra rằng phần lớn toán học như đã nêu trong cách may mắn cũ đơn giản là sai. Macaulay trong bài viết về Bacon đã đối chiếu tính chắc chắn của toán học với tính không chắc chắn của triết học; và bằng một ví dụ tu từ, anh ấy nói, "Không có phản ứng nào chống lại định lý của Taylor." Anh ấy không thể chọn một ví dụ nào tệ hơn. Vì, không cần kiểm tra các sách giáo khoa toán học bằng tiếng Anh cùng thời với việc xuất bản bài tiểu luận này, giả định là một giả định khá an toàn rằng Định lý Taylor đã được phát biểu và chứng minh sai trong mọi trường hợp. một trong số chúng. Theo đó, độ chính xác đáng lo ngại của toán học hiện đại là cần thiết cho sự chính xác. Ở vị trí thứ hai, nó là cần thiết cho nghiên cứu. Nó tạo nên sự rõ ràng trong suy nghĩ, và từ đó mang lại sự táo bạo trong suy nghĩ và khả năng sinh sản trong việc thử những cách kết hợp ý tưởng mới. Khi những tuyên bố ban đầu còn mơ hồ và sơ sài, ở mọi giai đoạn suy nghĩ tiếp theo, lẽ thường phải can thiệp để giới hạn các ứng dụng và giải thích ý nghĩa. Bây giờ trong suy nghĩ sáng tạo lẽ thường là một bậc thầy tồi. Tiêu chí đánh giá duy nhất của nó là những ý tưởng mới sẽ giống như những ý tưởng cũ. Nói cách khác, nó chỉ có thể hoạt động bằng cách triệt tiêu tính độc đáo.

Để hướng tới định nghĩa chính xác về tính liên tục (như được áp dụng cho các hàm), chúng ta hãy xem xét kỹ hơn phát biểu

rằng không có mối quan hệ "dần dần" giữa các số. Có thể hỏi, Không thể một số chỉ lớn hơn một chút so với số khác, hay nói cách khác, sự khác biệt giữa hai số không thể nhỏ? Toàn bộ vấn đề là trong phần trừu tượng, ngoài một số ứng dụng được giả định tùy ý, không có thứ gọi là số lớn hay số nhỏ. Một triệu dặm là một số dặm nhỏ đối với một nhà thiên văn đang nghiên cứu các ngôi sao cố định, nhưng một triệu bảng Anh là một khoản thu nhập lớn hàng năm. Một lần nữa, một phần tư là một phần lớn thu nhập của một người để làm từ thiện, nhưng là một phần nhỏ trong số đó để giữ lại cho mục đích cá nhân. Các ví dụ có thể được tích lũy vô tận để chỉ ra rằng lớn hay nhỏ theo bất kỳ nghĩa tuyệt đối nào không có ứng dụng trừu tượng nào đối với các con số. Chúng ta có thể nói về hai số mà số này lớn hơn hoặc nhỏ hơn số kia, nhưng không phải không có đặc điểm cụ thể của các trường hợp cụ thể mà bất kỳ số nào là lớn hay nhỏ. Do đó, nhiệm vụ của chúng ta là xác định tính liên tục mà không đề cập đến sự thay đổi "nhỏ" hoặc "dần dần" về giá trị của hàm.

Để làm điều này, chúng tôi sẽ đặt tên cho một số ý tưởng, điều này cũng sẽ hữu ích khi chúng ta xem xét các giới hạn và phép tính vi phân.

"khoảng" giá trị của đối số x của một hàm $f(x)$ là tất cả các giá trị nằm giữa hai giá trị nào đó của đối số. Ví dụ: khoảng giữa $x = 1$ và $x = 2$ bao gồm tất cả các giá trị mà x có thể nhận nằm giữa 1 và 2, tức là nó bao gồm tất cả các số thực trong khoảng từ 1 và 2. Nhưng các số giới hạn của một khoảng không nhất thiết phải là số nguyên. Một khoảng các giá trị của đối số *chứa* một số a, khi a là thành viên của khoảng. Ví dụ: khoảng giữa 1 và 2 chứa $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, v.v.

Một tập hợp các số xấp xỉ với một số a trong một *chuẩn* k, khi hiệu số giữa a và mọi số của tập hợp nhỏ hơn k. Ở đây k là "tiêu chuẩn của xấp xỉ." Do đó, tập hợp các số 3, 4, 6, 8, xấp xỉ với số 5 trong tiêu chuẩn 4. Trong trường hợp này, tiêu chuẩn 4 không phải là giá trị nhỏ nhất có thể được chọn, tập hợp cũng xấp xỉ 5 trong bất kỳ tiêu chuẩn nào trong số các tiêu chuẩn $3,1$ hoặc $3,01$

hoặc $3,001$. Một lần nữa, các con số, $3,1$, $3,141$, $3,1415$, $3,14159$ xấp xỉ với $3,13102$ trong tiêu chuẩn $,032$ và cả trong tiêu chuẩn nhỏ hơn $,03103$.

Hai ý tưởng về một khoảng và gần đúng với một số trong một tiêu chuẩn là đủ dễ dàng; khó khăn duy nhất của họ là họ trông khá tầm thường. Nhưng khi kết hợp với ý tưởng tiếp theo, ý tưởng về "láng giềng" của một số, chúng tạo thành nền tảng của lý luận toán học hiện đại. Chúng ta có ý gì khi nói rằng điều gì đó đúng đối với một hàm $f(x)$ trong vùng lân cận của giá trị a của đối số x? Chính khái niệm cơ bản này mà bây giờ chúng ta phải làm cho chính xác.

Các giá trị của một hàm $f(x)$ được cho là sở hữu một đặc điểm trong "láng giềng của a" khi có thể tìm thấy một số khoảng mà (i) chứa số a không làm điểm cuối và (ii) sao cho mọi giá trị của hàm đối với các đối số, ngoại trừ a, nằm trong khoảng đó đều có đặc điểm. Giá trị $f(a)$ của hàm cho đối số a có thể có hoặc không có đặc tính. Không có gì được quyết định vào thời điểm này bằng các tuyên bố về *vùng lân cận* của a.

Ví dụ: giả sử chúng ta lấy hàm cụ thể x^2. Bây giờ *trong vùng lân cận của* 2, các giá trị của x^2 nhỏ hơn 5. Vì chúng ta có thể tìm một khoảng, ví dụ từ 1 đến $2,1$, mà (i) chứa 2 không phải là điểm cuối và (ii) là khoảng sao cho, với các giá trị của x nằm bên trong nó, x^2 nhỏ hơn 5.

Bây giờ, kết hợp các ý tưởng trước đó, chúng ta biết ý nghĩa của việc nói rằng *trong lân cận của* a hàm $f(x)$ xấp xỉ với c trong *chuẩn* k. Điều đó có nghĩa là có thể tìm thấy một số khoảng mà (i) bao gồm a không phải là điểm cuối và (ii) sao cho tất cả các giá trị của $f(x)$, trong đó x nằm trong khoảng và không phải là a, khác với c nhỏ hơn k. Ví dụ: trong vùng lân cận của 2, hàm $\sqrt{x}$ xấp xỉ $1,41425$ trong tiêu chuẩn $,0001$. Điều này đúng vì căn bậc hai của $1,99996164$ là $1,4142$ và căn bậc hai của $2,00024449$ là $1,4143$; do đó, đối với các giá trị của x nằm trong khoảng từ $1,99996164$ đến $2,00024449$, trong đó chứa 2 không phải là điểm cuối, các giá trị của hàm $\sqrt{x}$ đều nằm trong khoảng từ

1, 4142 đến 1, 4143 và , do đó, tất cả chúng đều khác với 1, 41425 nhỏ hơn , 0001. Trong trường hợp này, nếu muốn, chúng tôi có thể sửa một tiêu chuẩn xấp xỉ nhỏ hơn, cụ thể là .000051 hoặc .0000501. Một lần nữa, lấy một ví dụ khác, trong vùng lân cận của 2, hàm x^2 xấp xỉ 4 trong tiêu chuẩn .5. Đối với $(1,9)^2 = 3,61$ và $(2,1)^2 = 4,41$, và do đó, khoảng 1, 9 đến 2, 1 bắt buộc, chứa 2 không phải là điểm cuối, đã được tìm thấy . Ví dụ này đưa ra một thực tế là các phát biểu về một hàm $f(x)$ trong lân cận của một số a khác với các phát biểu về giá trị của $f(x)$ khi $x = a$. Việc tạo ra một *khoảng*, trong đó tuyên bố là đúng, là bắt buộc. Do đó, thực tế đơn thuần là $2^2 = 4$ tự nó không biện minh cho chúng ta khi nói rằng trong *láng giềng* của 2 hàm x^2 bằng với 4. Tuyên bố này sẽ không đúng sự thật, vì không thể tạo khoảng thời gian nào với thuộc tính bắt buộc. Ngoài ra, thực tế là $2^2 = 4$ tự nó không biện minh cho chúng ta khi nói rằng trong *láng giềng* của 2 hàm x^2 xấp xỉ 4 trong tiêu chuẩn , 5; mặc dù trên thực tế, tuyên bố vừa được chứng minh là đúng.

Nếu chúng ta hiểu những ý tưởng trước, chúng ta hiểu nền tảng của toán học hiện đại. Chúng ta sẽ nhắc lại những ý tưởng tương tự trong chương về Chuỗi số, và một lần nữa trong chương về Phép tính vi phân. Trong khi đó, chúng ta hiện đang chuẩn bị để định nghĩa "hàm liên tục." Một hàm $f(x)$ là "liên tục' ' ở giá trị a của đối số, khi ở lân cận a giá trị của nó xấp xỉ $f(a)$ (tức là giá trị của nó tại a) trong phạm vi *mọi* chuẩn của xấp xỉ.

Điều này có nghĩa là, bất kể tiêu chuẩn nào k được chọn, trong lân cận của a $f(x)$ xấp xỉ $f(a)$ trong tiêu chuẩn k. Ví dụ: x^2 liên tục tại giá trị 2 của đối số của nó, x, bởi vì dù k được chọn như thế nào, chúng ta luôn có thể tìm thấy một khoảng mà (i) chứa 2 không phải là điểm cuối và (ii) sao cho các giá trị của x^2 cho các đối số nằm bên trong nó xấp xỉ bằng 4 (*tức là* 2^2) trong chuẩn k. Vì vậy, giả sử chúng ta chọn tiêu chuẩn .1; bây giờ $(1,999)^2 = 3,996001$ và $(2,01)^2 = 4,0401$ và cả hai số này chênh lệch từ 4 nhỏ hơn , 1. Do đó, trong khoảng từ 1, 999 đến 2, 01, các giá trị của x^2 xấp xỉ với 4 trong tiêu chuẩn , 1. Tương tự, một

khoảng thời gian có thể được tạo ra cho bất kỳ tiêu chuẩn nào khác mà chúng tôi muốn thử.

Lấy ví dụ về tàu hỏa. Vận tốc của nó là liên tục khi nó đi qua hộp tín hiệu, nếu bạn muốn gán bất kỳ vận tốc nào (chẳng hạn một phần triệu dặm trên giờ) thì có thể tìm thấy một khoảng thời gian kéo dài trước và sau thời điểm đi qua, sao cho tại mọi thời điểm trong đó, vận tốc của đoàn tàu khác với vận tốc mà đoàn tàu đi qua chiếc hộp ít hơn một phần triệu dặm mỗi giờ; và điều này cũng đúng với bất kỳ vận tốc nào khác được đề cập ở vị trí một phần triệu dặm trên giờ.

CHƯƠNG XII

ĐỊNH KỲ TRONG TỰ NHIÊN

TOÀN BỘ cuộc sống của Tự nhiên bị chi phối bởi sự tồn tại của các sự kiện định kỳ, nghĩa là bởi sự tồn tại của các sự kiện liên tiếp tương tự nhau đến mức, nếu không có bất kỳ sự căng thẳng nào về ngôn ngữ, chúng có thể được gọi là sự lặp lại của cùng một sự kiện. Vòng quay của trái đất tạo ra những ngày kế tiếp nhau. Đúng là mỗi ngày đều khác với những ngày trước đó, tuy nhiên chúng ta xác định ý nghĩa của một ngày một cách trừu tượng, để loại trừ các hiện tượng ngẫu nhiên. Nhưng với một định nghĩa khá trừu tượng về một ngày, sự khác biệt về tính chất giữa hai ngày trở nên mờ nhạt và xa rời lợi ích thực tế; và mỗi ngày sau đó có thể được coi là sự lặp lại của hiện tượng một vòng quay của trái đất. Một lần nữa, quỹ đạo của trái đất quay quanh mặt trời dẫn đến sự lặp lại hàng năm của các mùa, và áp đặt một tính chu kỳ khác cho tất cả các hoạt động của tự nhiên. Một chu kỳ ít cơ bản khác được cung cấp bởi các giai đoạn của mặt trăng. Trong cuộc sống văn minh hiện đại, với ánh sáng nhân tạo, những giai đoạn này ít quan trọng, nhưng trong thời cổ đại, ở những vùng khí hậu có ngày cháy và bầu trời quang đãng, cuộc sống con người rõ ràng chịu ảnh hưởng lớn bởi sự tồn tại của ánh trăng . Theo đó, sự phân chia của chúng ta thành các tuần và tháng, cùng với các hiệp hội tôn giáo của chúng, đã lan rộng khắp các chủng tộc châu Âu từ Syria và Lưỡng Hà, mặc dù hầu hết các quốc gia đều có các nghi lễ độc lập theo tuần trăng. Tuy nhiên, thông qua thủy triều, chứ không phải thông qua các pha sáng và tối của nó, chu kỳ của mặt trăng đã ảnh hưởng chủ yếu đến lịch sử trái đất.

Cuộc sống cơ thể của chúng tôi về cơ bản là định kỳ. Nó bị chi phối bởi nhịp đập của tim và sự tái diễn của hơi thở. Giả định trước về tính chu kỳ thực sự là nền tảng cho chính quan niệm của chúng ta về cuộc sống. Chúng ta không thể hình dung một tiến trình tự nhiên mà trong đó, khi các sự kiện diễn ra, chúng

ta không thể nói: "Điều này đã từng xảy ra trước đây". Đàn ông sẽ luôn thấy mình trong những tình huống mới không có cơ sở đồng nhất với bất cứ điều gì trong lịch sử quá khứ. Sẽ không có phương tiện đo thời gian như một đại lượng. Các sự kiện vẫn có thể được công nhận là xảy ra trong một chuỗi, do đó một số xảy ra sớm hơn và một số khác muộn hơn. Nhưng bây giờ chúng tôi vượt ra ngoài sự công nhận trần trụi này. Chúng ta không chỉ có thể nói rằng ba sự kiện, A, B, C, đã xảy ra theo thứ tự này, sao cho A có trước B, và B trước C; nhưng chúng ta cũng có thể nói rằng khoảng thời gian giữa các lần xuất hiện của A và B dài gấp đôi khoảng thời gian giữa B và C. Bây giờ, lượng thời gian về cơ bản phụ thuộc vào việc quan sát số lần lặp lại tự nhiên đã can thiệp. Chúng tôi có thể nói rằng khoảng thời gian giữa A và B là rất nhiều ngày, rất nhiều tháng hoặc rất nhiều năm, tùy theo loại tái phát mà chúng tôi muốn khiếu nại. Thật vậy, vào thời kỳ đầu của nền văn minh, ba phương thức đo thời gian này thực sự khác biệt. Một trong những nhiệm vụ đầu tiên của khoa học giữa các quốc gia văn minh hoặc bán văn minh là hợp nhất chúng thành một thước đo thống nhất. Toàn bộ phạm vi của nhiệm vụ này phải được nắm bắt. Cần phải xác định, không chỉ là số ngày (*ví dụ* $365,25\ldots$) diễn ra trong một năm nào đó, mà trước đó còn phải xác định rằng số ngày đó sẽ diễn ra trong các năm tiếp theo. Chúng ta có thể tưởng tượng một thế giới trong đó tồn tại các chu kỳ, nhưng không có hai thứ nào nhất quán với nhau. Trong một số năm có thể có 200 ngày và trong những năm khác 350. Việc xác định tính nhất quán chung của các chu kỳ quan trọng hơn là bước đầu tiên trong khoa học tự nhiên. Tính nhất quán này không phát sinh từ quy luật trực giác trừu tượng nào của tư duy; nó chỉ là một thực tế tự nhiên quan sát được được đảm bảo bằng kinh nghiệm. Thật vậy, cho đến nay nó vẫn chưa phải là một luật cần thiết, rằng nó thậm chí không hoàn toàn đúng. Có sự khác biệt trong mọi trường hợp. Đối với một số trường hợp, những khác biệt này có thể dễ dàng quan sát được và do đó rõ ràng ngay lập tức. Trong những trường hợp khác, nó đòi hỏi

những quan sát tinh tế nhất và độ chính xác thiên văn để làm cho chúng trở nên rõ ràng. Nói rộng ra, tất cả các sự lặp lại tùy thuộc vào chúng sinh, chẳng hạn như nhịp đập của trái tim, đều có thể thay đổi nhanh chóng so với các sự lặp lại khác. Các sự tái diễn rõ ràng ổn định lớn—ổn định theo nghĩa đồng ý với nhau với độ chính xác cao—là những sự tái diễn phụ thuộc vào chuyển động của trái đất nói chung và vào các chuyển động tương tự của các thiên thể.

Do đó, chúng tôi giả định rằng các lần lặp lại thiên văn này đánh dấu các khoảng thời gian bằng nhau. Nhưng làm thế nào chúng ta giải quyết được những khác biệt của chúng mà các quan sát tinh tế của thiên văn học phát hiện ra? Rõ ràng chúng ta bị giảm xuống giả định tùy ý rằng một hoặc một số tập hợp hiện tượng này đánh dấu thời gian bằng nhau—Ví dụ: rằng tất cả các ngày đều có độ dài bằng nhau hoặc tất cả các năm đều có độ dài bằng nhau. Điều này không phải như vậy: một số giả định phải được đưa ra, nhưng giả định làm cơ sở cho toàn bộ quy trình của các nhà thiên văn học trong việc xác định thước đo thời gian là các quy luật chuyển động được xác minh chính xác. Trước khi giải thích điều này được thực hiện như thế nào, thật thú vị khi quan sát thấy rằng việc xác định thước đo thời gian đối với các nhà thiên văn học bị loại bỏ (như đã nói) phát sinh từ tính nhất quán ổn định của các phép lặp mà họ giải quyết. Nếu tính nhất quán vượt trội như vậy đã được ghi nhận trong số các đặc điểm tái phát của cơ thể con người, thì lẽ ra chúng ta nên tìm đến các bác sĩ y khoa để điều chỉnh đồng hồ của mình.

Khi xem xét các định luật chuyển động hình thành như thế nào đối với vấn đề, hãy lưu ý rằng hai phương thức đo thời gian không nhất quán sẽ tạo ra các biến thể khác nhau của vận tốc đối với cùng một vật thể. Ví dụ, giả sử chúng ta định nghĩa một giờ là một phần hai mươi bốn của một ngày, và xét trường hợp một đoàn tàu chạy đều trong hai giờ với tốc độ hai mươi dặm một giờ. Bây giờ hãy lấy một thước đo thời gian hoàn toàn không nhất quán và giả sử rằng nó làm cho giờ đầu tiên dài gấp đôi

giờ thứ hai. Sau đó, theo cách đo thời lượng khác này, thời gian chạy của đoàn tàu được chia thành hai phần, trong mỗi phần nó đã đi qua một quãng đường như nhau, cụ thể là hai mươi dặm; nhưng thời lượng của phần thứ nhất dài gấp đôi phần thứ hai. Do đó, vận tốc của đoàn tàu không đồng đều và trung bình vận tốc trong giai đoạn thứ hai gấp đôi vận tốc trong giai đoạn thứ nhất. Do đó, câu hỏi liệu đoàn tàu có chạy đều hay không hoàn toàn phụ thuộc vào tiêu chuẩn thời gian mà chúng ta áp dụng.

Giờ đây, đối với tất cả các mục đích thông thường của cuộc sống trên trái đất, các chu kỳ thiên văn khác nhau có thể được coi là tuyệt đối nhất quán; và, hơn nữa giả định tính nhất quán của chúng, và do đó giả định vận tốc và sự thay đổi của vận tốc mà các vật sở hữu, chúng ta thấy rằng các định luật chuyển động, đã được xem xét ở trên, gần như được kiểm chứng chính xác. Nhưng chỉ *gần như* chính xác khi chúng ta đến với một số hiện tượng thiên văn. Tuy nhiên, chúng ta thấy rằng bằng cách giả sử các vận tốc quay và chuyển động của các hành tinh và các ngôi sao hơi khác nhau một chút, các định luật sẽ được kiểm chứng chính xác. Giả định này sau đó được thực hiện; và trên thực tế, bằng cách đó, chúng tôi đã chấp nhận một thước đo thời gian, thước đo này thực sự được xác định bằng cách tham khảo các hiện tượng thiên văn, nhưng không nhất quán với tính đồng nhất của bất kỳ một trong số chúng. Nhưng sự thật rộng rãi vẫn là dòng thời gian đồng nhất mà rất nhiều thứ dựa vào, bản thân nó lại phụ thuộc vào việc quan sát các sự kiện định kỳ.

Ngay cả những hiện tượng, bề ngoài có vẻ ngẫu nhiên và ngoại lệ, hoặc mặt khác, chúng tự duy trì một cách dai dẳng đồng nhất, cũng có thể là do ảnh hưởng từ xa của tính tuần hoàn. Lấy nguyên lý cộng hưởng làm ví dụ. Cộng hưởng phát sinh khi hai tập hợp các trường hợp được kết nối có cùng chu kỳ. Đó là một quy luật động lực học rằng các dao động nhỏ của tất cả các cơ thể khi được để yên diễn ra trong những thời điểm xác định đặc trưng của cơ thể. Do đó, một con lắc có dao động nhỏ luôn dao động trong một khoảng thời gian xác định, đặc trưng cho hình

dạng và sự phân bố trọng lượng và chiều dài của nó. Một cơ thể phức tạp hơn có thể có nhiều cách rung động; nhưng mỗi dạng dao động của nó sẽ có “chu kì” đặc thù của nó. Các chu kì dao động đó của một vật được gọi là “các chu kì tự do” của nó. Do đó, một con lắc chỉ có một chu kỳ dao động, trong khi một cây cầu treo sẽ có nhiều chu kỳ. Chúng ta có một nhạc cụ, chẳng hạn như dây đàn vĩ cầm, khi các chu kỳ dao động đều là bội số con đơn giản của chu kỳ dao động dài nhất; *tức là* nếu t giây là khoảng thời gian dài nhất, thì các khoảng thời gian khác là $\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{3}t$, v.v., trong đó bất kỳ khoảng thời gian nào nhỏ hơn kinh nguyệt có thể vắng mặt. Bây giờ, giả sử chúng ta kích thích các dao động của một vật thể bởi một nguyên nhân mà bản thân nó mang tính tuần hoàn; sau đó, nếu thời kỳ của nguyên nhân rất gần với thời kỳ của một trong các thời kỳ của cơ thể, thì phương thức rung động đó của cơ thể bị kích thích rất dữ dội; ngay cả khi tầm quan trọng của nguyên nhân thú vị là nhỏ. Hiện tượng này được gọi là “cộng hưởng.” Lý do chung rất dễ hiểu. Bất kỳ ai muốn làm đảo lộn một hòn đá bập bênh sẽ đẩy “đồng điệu” với các dao động của hòn đá, để luôn đảm bảo thời điểm thuận lợi cho việc đẩy. Nếu các lần đẩy không đồng điệu, một số sẽ tăng dao động, nhưng một số khác sẽ kiểm tra chúng. Nhưng khi chúng đã đồng điệu, sau một thời gian, mọi cú hích đều thuận lợi. Từ “cộng hưởng” xuất phát từ những cân nhắc về âm thanh: nhưng hiện tượng này còn mở rộng ra ngoài phạm vi của âm thanh. Các định luật hấp thụ và phát xạ ánh sáng phụ thuộc vào nó, "điều chỉnh" máy thu cho điện báo không dây, tầm quan trọng so sánh về ảnh hưởng của các hành tinh đối với chuyển động của nhau, mối nguy hiểm đối với cây cầu treo khi quân đội diễu hành qua nó từng bước , và sự rung động quá mức của một số con tàu dưới nhịp đập nhịp nhàng của máy móc ở những tốc độ nhất định. Sự trùng hợp tuần hoàn này có thể tạo ra những hiện tượng ổn định khi có sự liên kết thường xuyên của hai sự kiện tuần hoàn, hoặc nó có thể tạo ra những cơn bùng nổ dữ dội và đột ngột khi sự liên kết đó là ngẫu nhiên và tạm thời.

Một lần nữa, các giai đoạn rung động đặc trưng và liên tục được đề cập ở trên là những nguyên nhân cơ bản của những gì chúng ta thấy như là sự phấn khích ổn định của các giác quan. Chúng ta làm việc hàng giờ dưới ánh sáng ổn định hoặc chúng ta lắng nghe âm thanh ổn định không thay đổi. Nhưng, nếu khoa học hiện đại đúng, thì sự ổn định này không có đối trọng trong tự nhiên. Ánh sáng ổn định là do tác động lên mắt của vô số sóng tuần hoàn trong ête dao động và âm thanh ổn định đối với các sóng tương tự trong không khí dao động. Mục đích của chúng ta ở đây không phải là giải thích lý thuyết về ánh sáng hay lý thuyết về âm thanh. Chúng tôi đã nói đủ để làm rõ rằng một trong những bước đầu tiên cần thiết để làm cho toán học trở thành một công cụ thích hợp cho việc nghiên cứu Tự nhiên là nó phải có khả năng diễn đạt tính tuần hoàn thiết yếu của các sự vật. Nếu hiểu được điều này, chúng ta có thể hiểu được tầm quan trọng của các khái niệm toán học mà chúng ta sẽ xem xét tiếp theo, cụ thể là các hàm tuần hoàn.

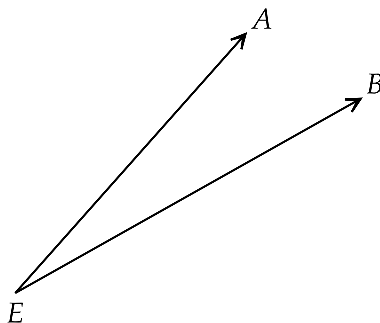
CHƯƠNG XIII

LƯỢNG GIÁC

LƯỢNG GIÁC không bắt nguồn từ xem xét chung về tính tuần hoàn của tự nhiên. Về khía cạnh này, lịch sử của nó tương tự như lịch sử của các tiết diện hình nón, cũng có nguồn gốc từ những ý tưởng rất đặc biệt. Thật vậy, việc so sánh lịch sử của hai ngành khoa học mang lại một số điểm tương đồng và tương phản rất hữu ích. Lượng giác, giống như các phần hình nón, có nguồn gốc từ người Hy Lạp. Người phát minh ra nó là Hipparchus (sinh khoảng 160 TCN), một nhà thiên văn học người Hy Lạp, người đã thực hiện các quan sát của mình tại Rhodes. Những đóng góp của ông cho thiên văn học là rất lớn, và nó đã để lại cho của ông một chủ đề khoa học thực sự với những kết quả quan trọng đã được thiết lập và phương pháp tiến bộ phù hợp đã được chỉ ra. Có lẽ việc phát minh ra lượng giác không phải là ít nhất trong số những dịch vụ này đối với ngành khoa học chính mà ông nghiên cứu. Người tiếp theo mở rộng lượng giác là Ptolemy, nhà thiên văn học vĩ đại người Alexandrian, mà chúng ta đã đề cập. Bây giờ chúng ta thấy ngay sự tương phản lớn giữa các đường cônic và lượng giác. Nguồn gốc của lượng giác là thực tế; nó được phát minh ra vì nó cần thiết cho nghiên cứu thiên văn. Nguồn gốc của các phần hình nón hoàn toàn là lý thuyết. Lý do duy nhất cho nghiên cứu ban đầu của nó là mối quan tâm trừu tượng của những ý tưởng liên quan. Các phần hình nón đủ đặc trưng đã được phát minh khoảng 150 năm sớm hơn lượng giác, trong thời kỳ tư tưởng Hy Lạp phát triển nhất. Nhưng tầm quan trọng của lượng giác, đối với cả lý thuyết và ứng dụng của toán học, chỉ là một trong vô số ví dụ về những ý tưởng hiệu quả mà khoa học tổng quát đã thu được từ các ứng dụng thực tế của nó.

Chúng ta sẽ cố gắng làm rõ lượng giác là gì, và tại sao nó phải được tạo ra bởi nghiên cứu khoa học về thiên văn học. Đầu tiên: Các phép đo mà nhà thiên văn học có thể thực hiện là gì?

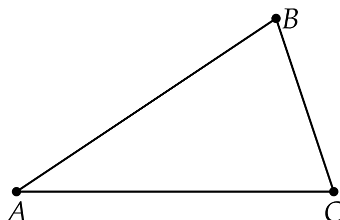
Chúng là phép đo thời gian và phép đo góc. Nhà thiên văn học có thể điều chỉnh kính thiên văn (vì dễ thảo luận về dụng cụ quen thuộc của các nhà thiên văn học hiện đại) sao cho nó chỉ có thể quay quanh một trục cố định chỉ hướng đông và hướng tây; kết quả là kính viễn vọng chỉ có thể hướng về phía nam, với độ cao lớn hơn hoặc nhỏ hơn của hướng, hoặc, nếu quay vòng ra ngoài thiên đỉnh, sẽ hướng về phía bắc. Đây là công cụ chuyển tuyến, công cụ tuyệt vời để đo chính xác thời gian các ngôi sao di chuyển theo hướng chính nam hoặc chính bắc. Nhưng gián tiếp dụng cụ này đo góc. Vì khi thời gian trôi qua giữa các lần đi qua của hai ngôi sao đã được ghi nhận, theo giả thiết trái đất quay đều, chúng ta thu được góc mà trái đất đã quay trong khoảng thời gian đó. Một lần nữa, bằng các dụng cụ khác, góc giữa hai ngôi sao có thể được đo trực tiếp. Vì nếu E là con mắt của nhà thiên văn học, và



Hình 22.

EA và EB là các hướng mà các ngôi sao được nhìn thấy, thật dễ dàng để tạo ra các dụng cụ đo góc AEB. Do đó, khi nhà thiên văn học đang hình thành một cuộc khảo sát bầu trời, trên thực tế, anh ta đang đo các góc để ấn định hướng tương đối của các ngôi sao và hành tinh bất cứ lúc nào. Một lần nữa, trong bài toán tương tự về khảo sát đất đai , các góc là đối tượng chính của phép đo. Các phép đo trực tiếp độ dài hiếm khi có thể thực hiện được với bất kỳ độ chính xác nào; sông, nhà, rừng, núi và những bất thường chung của mặt đất đều cản trở. Việc khảo sát cả một quốc gia sẽ chỉ phụ thuộc vào một hoặc hai phép đo chiều dài trực tiếp, được thực hiện với sự công phu nhất ở những nơi được chọn như Đồng

bằng Salisbury. Công việc chính của một cuộc khảo sát là đo các góc. Ví dụ: A, B và C sẽ là những điểm dễ thấy trong phân khu, được khảo sát, nói rằng các đỉnh của tháp nhà thờ. Những điểm

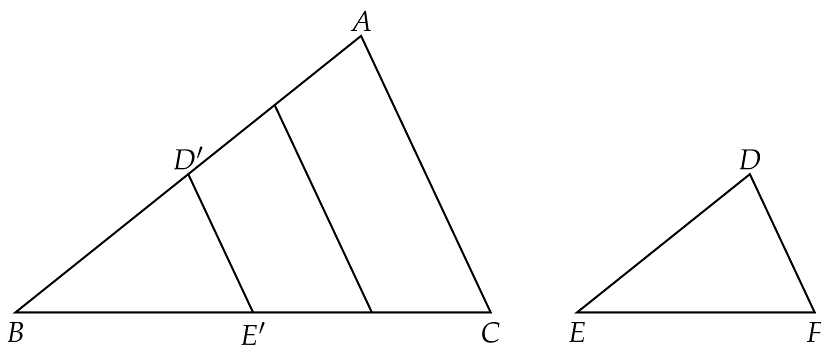


Hình 23.

này có thể nhìn thấy từng điểm từ những điểm khác. Khi đó, vấn đề rất đơn giản là A để đo góc BAC, và tại B để đo góc ABC, và tại C để đo góc BCA . Về mặt lý thuyết, chỉ cần đo hai trong số các góc này; vì, theo một mệnh đề nổi tiếng trong hình học, tổng ba góc của một tam giác bằng hai góc vuông, do đó, khi biết hai trong số các góc, có thể suy ra góc thứ ba. Tuy nhiên, trong thực tế tốt hơn là đo cả ba, và sau đó có thể kiểm tra bất kỳ lỗi quan sát nhỏ nào. Trong quá trình tạo bản đồ, một quốc gia được bao phủ hoàn toàn bằng các hình tam giác theo cách này. Quá trình này được gọi là phép đo tam giác và là quá trình cơ bản trong một cuộc khảo sát.

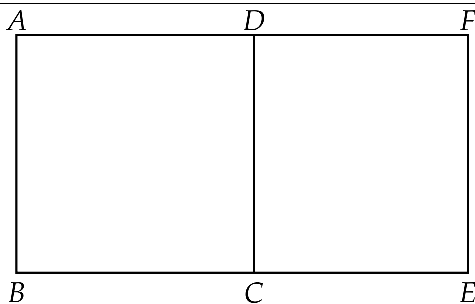
Bây giờ, khi đã biết tất cả các góc của một tam giác, thì hình dạng của tam giác sẽ được biết—tức là hình dạng được phân biệt với kích thước. Ở đây chúng ta bắt gặp nguyên lý vĩ đại của sự đồng dạng hình học. Ý tưởng này rất quen thuộc với chúng ta trong các ứng dụng thực tế của nó. Tất cả chúng ta đều quen thuộc với ý tưởng về một kế hoạch được vẽ theo tỷ lệ. Do đó, nếu tỷ lệ của một kế hoạch là một inch đến một thước Anh, thì chiều dài ba inch trong kế hoạch có nghĩa là chiều dài ba thước Anh trong bản gốc. Ngoài ra, các hình được mô tả trong sơ đồ là các hình trong bản gốc, do đó góc vuông trong bản gốc xuất hiện dưới dạng góc vuông trong bản vẽ. Tương tự như vậy trong một bản đồ, chỉ là kế hoạch của một quốc gia, tỷ lệ độ dài trong bản đồ là tỷ lệ khoảng cách giữa các địa điểm được chỉ định và các

hướng trong bản đồ là các hướng trong quốc gia. Ví dụ, nếu trên bản đồ, nơi này là hướng bắc-tây bắc của nơi kia, thì thực tế nó là như vậy; nghĩa là, trong bản đồ, các góc giống như trong thực tế. Sự giống nhau về hình học có thể được định nghĩa như sau: Hai hình giống nhau (i) nếu đối với bất kỳ điểm nào trong hình này thì tương ứng với một điểm trong hình kia, do đó với mỗi đường thẳng đều có một đoạn thẳng tương ứng, và mỗi góc có một góc tương ứng, và (ii) nếu độ dài của các đoạn thẳng tương ứng theo một tỷ lệ cố định, và độ lớn của các góc tương ứng là như nhau. Tỷ lệ cố định về độ dài của các đường tương ứng trong bản đồ (hoặc sơ đồ) và trong bản gốc được gọi là tỷ lệ bản đồ. Tỷ lệ phải luôn được chỉ định trên lề của mọi bản đồ và kế hoạch. Người ta đã chỉ ra rằng hai tam giác có các góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau. Như vậy, nếu hai tam giác ABC và DEF có các góc A



Hình 24.

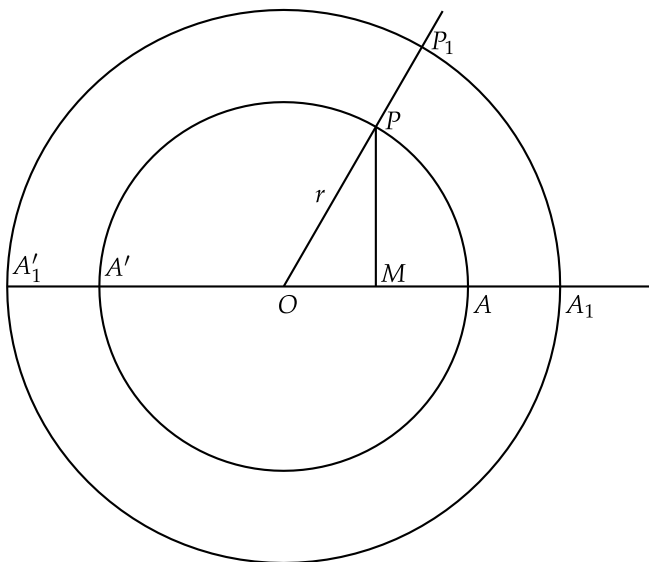
và D bằng nhau, các góc B và E bằng nhau, các góc C và F bằng DE là AB theo cùng tỷ lệ như EF là BC và FD là CA. Nhưng không đúng với các hình khác khi sự giống nhau chỉ được đảm bảo bằng sự bằng nhau của các góc. Lấy ví dụ, các trường hợp quen thuộc của hình chữ nhật và hình vuông. Cho $ABCD$ là hình vuông và $ABEF$ là hình chữ nhật. Khi đó tất cả các góc tương ứng đều bằng nhau. Nhưng trong khi cạnh AB của hình vuông bằng cạnh AB của hình chữ nhật, thì cạnh BC của hình vuông bằng



Hình 25.

một nửa kích thước của cạnh BE của hình chữ nhật. Do đó, việc hình vuông $ABCD$ đồng dạng với hình chữ nhật $ABEF$ là không đúng. Tính chất đặc biệt này của tam giác, vốn không có ở các hình thẳng hàng khác, làm cho nó trở thành hình cơ bản trong lý thuyết về sự đồng dạng. Do đó trong các cuộc khảo sát, kiểm tra chéo là quá trình cơ bản; và do đó cũng nảy sinh từ "lượng giác" bắt nguồn từ hai từ tiếng Hy Lạp *trigonon* một tam giác và phép đo *metria*. Câu hỏi cơ bản làm nảy sinh lượng giác là: Cho độ lớn các góc của một tam giác, có thể phát biểu điều gì về độ lớn tương đối của các cạnh. Lưu ý rằng chúng tôi nói "*tương đối* độ lớn của các cạnh," vì theo lý thuyết về sự tương tự, chỉ có tỷ lệ của các cạnh được biết đến. Để trả lời câu hỏi này, một số chức năng nhất định của độ lớn của một góc, được coi là đối số, được giới thiệu. Trong nguồn gốc của chúng, những chức năng này đã đạt được bằng cách xem xét một tam giác vuông góc, và độ lớn của góc được xác định bởi độ dài của cung của một vòng tròn. Trong các sách tiểu học hiện đại, vị trí cơ bản của cung tròn như xác định độ lớn của góc đã phần nào bị đẩy xuống nền tảng, không có lợi cho lý thuyết hay sự rõ ràng của lời giải thích. Đầu tiên cần lưu ý rằng, liên quan đến sự giống nhau, hình tròn giữ vị trí cơ bản giống nhau giữa các hình cong, cũng như hình tam giác giữa các hình thẳng. Hai đường tròn bất kỳ là các hình đồng dạng; chúng chỉ khác nhau về quy mô. Độ dài chu vi của hai hình tròn, chẳng hạn như APA' và $A_1P_1A'_1$ trong Hình 26 tỷ lệ với độ dài của chúng bán kính. Hơn nữa, nếu hai vòng tròn có cùng tâm O, giống như hai vòng tròn trong Hình 26, thì các cung AP và A_1P_1

bị chặn bởi các cạnh của bất kỳ góc nào AOP, cũng tỷ lệ thuận với bán kính của chúng. Do đó tỷ lệ của độ dài của cung AP thành



Hình 26.

độ dài của bán kính OP, nghĩa là $\dfrac{\text{arc } AP}{\text{radius } OP}$ là một số hoàn toàn độc lập với độ dài OP, và giống như phân số $\dfrac{\text{arc } A_1P_1}{\text{radius } OP_1}$. Phân số của "cung chia cho bán kính" này là cách lý thuyết phù hợp để đo độ lớn của một góc; vì nó không phụ thuộc vào bất kỳ đơn vị độ dài tùy ý nào và không phụ thuộc vào cách tùy ý chia bất kỳ góc được giả định tùy ý nào, chẳng hạn như góc vuông. Do đó, phân số $\dfrac{AP}{OA}$ đại diện cho độ lớn của góc AOP. Bây giờ vẽ PM vuông góc với OA. Sau đó, các nhà toán học Hy Lạp gọi đường thẳng PM là sin của cung AP, và đường thẳng OM là cosin của cung AP. Họ nhận thức rõ rằng tầm quan trọng của mối quan hệ giữa các dòng khác nhau này phụ thuộc vào lý thuyết về sự tương đồng mà chúng tôi vừa trình bày. Nhưng họ đã không làm cho các định nghĩa của họ thể hiện các tính chất phát sinh từ lý thuyết này. Ngoài ra, họ không có trong đầu những ý tưởng tổng quát hiện đại về các hàm như các cặp biến số tương quan, và trên

thực tế, họ cũng không biết về bất kỳ quan niệm hiện đại nào về đại số và giải tích đại số. Theo đó, đối với họ, việc chỉ nghĩ đơn thuần về mối quan hệ giữa các đường nhất định trong sơ đồ là điều tự nhiên. Đối với chúng tôi thì trường hợp khác: chúng tôi muốn thể hiện những ý tưởng mạnh mẽ hơn của mình.

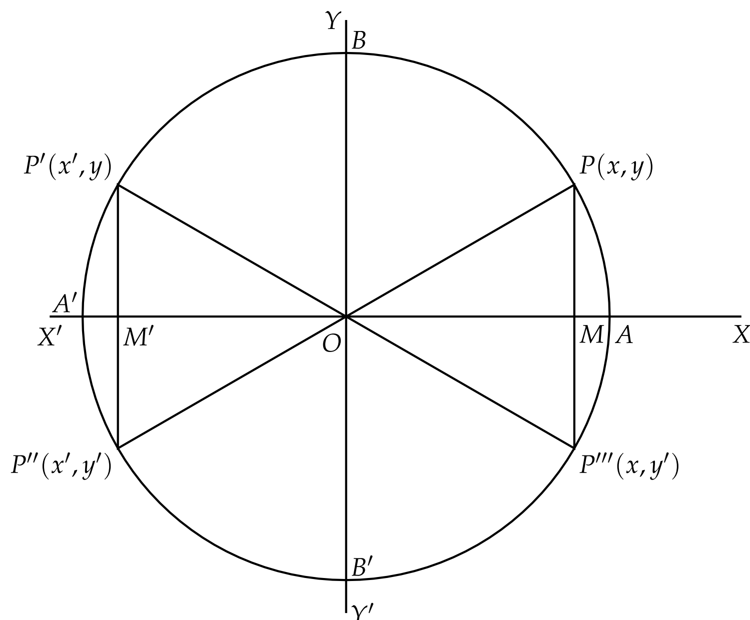
Do đó, trong toán học hiện đại, thay vì xét cung AP, chúng ta xét phân số $\frac{AP}{OP}$, là một số giống nhau với mọi độ dài của OP; và, thay vì xem xét các dòng PM và OM, chúng tôi xem xét các phân số $\frac{PM}{OP}$ và $\frac{OM}{OP}$, một lần nữa là những con số không phụ thuộc vào độ dài của OP, tức là không phụ thuộc vào tỷ lệ biểu đồ của chúng ta. Sau đó, chúng tôi xác định số $\frac{PM}{OP}$ là *sine* của số $\frac{PA}{OP}$ và số $\frac{OM}{OP}$ là *cosine* của số $\frac{PA}{OP}$. Các dạng phân số này rất khó in; vì vậy, chúng ta hãy đặt u cho phân số $\frac{AP}{OP}$, đại diện cho độ lớn của góc AOP và đặt v cho phân số $\frac{PM}{OM}$ và w cho phân số $\frac{OM}{OP}$. Khi đó u, v, w, là các số, và vì chúng ta đang nói về góc *bất kỳ* AOP, nên chúng là các số thay đổi. Nhưng có một mối tương quan tồn tại giữa độ lớn của chúng, vì vậy khi u (tức là góc AOP) được cung cấp thì độ lớn của v và w chắc chắn được xác định. Do đó v and w là các hàm của đối số u. Chúng ta đã gọi v là *sine* của u, và w là *cosine* của u. Chúng tôi muốn điều chỉnh ký hiệu hàm tổng quát $y = f(x)$ cho những trường hợp đặc biệt này: vì vậy trong toán học hiện đại, chúng tôi viết "sin" cho "f" khi chúng tôi muốn chỉ ra chức năng đặc biệt của "sine," và "cos" cho "f" khi chúng tôi muốn chỉ ra chức năng đặc biệt của "cosine." Do đó, với các nghĩa trên cho u, v, w, chúng ta có

$$v = \sin u, \quad \text{and} \quad w = \cos u,$$

trong đó các dấu ngoặc xung quanh x in $f(x)$ được bỏ qua cho các chức năng đặc biệt. Ý nghĩa của các hàm sin và cos này là tương quan giữa các cặp số u and v, và u and w là để tìm các quan hệ hàm bằng cách dựng (*xem* Hình 26) một góc AOP, có

số đo "AP chia cho OP" bằng u, và sau đó v là số được cho bởi "PM chia cho OP" và w là số được cho bởi "OM chia cho OP."

Rõ ràng là nếu không có thêm một số định nghĩa thì chúng ta sẽ gặp khó khăn khi lấy số u quá lớn. Vì khi đó cung AP có thể lớn hơn 1/4 chu vi của hình tròn và điểm M (*xem* Hình 26 và 27) có thể rơi giữa O và A' chứ không phải giữa O và A. Ngoài ra P có thể ở dưới dòng AOA' chứ không phải ở trên như trong Hình 26. Để vượt qua khó khăn này, chúng ta phải viện đến các ý tưởng và quy ước của hình học tọa độ để đưa ra các định nghĩa đầy đủ về sin và cosin. Đặt một cạnh OA của góc là trục OX, và tạo trục ngược lại để có được phần âm của nó OX'. Vẽ trục kia YOY' vuông góc với nó. Đặt bất kỳ điểm nào P ở khoảng cách r từ O có tọa độ x và y. Cả hai tọa độ này đều dương trong "góc phần tư" đầu tiên của sơ đồ, ví dụ: tọa độ x và y của P trong



Hình 27.

Hình 27. Trong các góc phần tư khác, một hoặc cả hai tọa độ đều âm, ví dụ: x' and y cho P', và x' và y' cho P'', và x và y' cho P''' trong Hình 27, trong đó x' và y' đều là số âm. Góc dương POA

là cung AP chia cho r, sin của nó là $\frac{y}{r}$ và cosin của nó là $\frac{x}{r}$; góc dương AOP' là cung ABP' chia cho r, sin của nó là $\frac{y}{r}$ và cos $\frac{x'}{r}$; góc dương AOP'' là cung $ABA'P''$ chia cho r, sin của nó là $\frac{y'}{r}$ và cosin của nó là $\frac{x'}{r}$; góc dương AOP''' là cung $ABA'B'P'''$ chia cho r, sin của nó là $\frac{y'}{r}$ và cosin của nó là $\frac{x}{r}$.

Nhưng ngay cả bây giờ chúng ta vẫn chưa đi đủ xa. Giả sử chúng ta chọn u là một số lớn hơn tỷ số của toàn bộ chu vi hình tròn với bán kính của nó. Do sự giống nhau của tất cả các vòng tròn, tỷ lệ này là giống nhau cho tất cả các vòng tròn. Nó luôn được biểu thị trong toán học bằng ký hiệu 2π, trong đó π là dạng chữ Hy Lạp của chữ cái p và tên của nó trong bảng chữ cái Hy Lạp là "pi." Nó có thể được chứng minh rằng π là một số không thể so sánh được, và do đó giá trị của nó không thể được biểu thị bằng bất kỳ phân số nào, hoặc bằng bất kỳ số thập phân có cuối hoặc tuần hoàn nào. Giá trị của nó đến một vài chữ số thập phân là $3,14159$; đối với nhiều mục đích, một giá trị gần đúng đủ chính xác là $\frac{22}{7}$. Các nhà toán học có thể dễ dàng tính toán π với bất kỳ mức độ chính xác nào được yêu cầu, giống như $\sqrt{2}$ có thể được tính toán như vậy. Giá trị của nó thực sự được trao cho 707 vị trí của số thập phân. Việc xây dựng tính toán như vậy chỉ đơn thuần là một sự tò mò và không có lợi ích thực tế hoặc lý thuyết. Việc xác định chính xác π là một trong hai phần của bài toán bình phương hình tròn nổi tiếng. Phần khác của vấn đề là, bằng các phương pháp lý thuyết của hình học thuần túy để mô tả một đường thẳng có độ dài bằng chu vi. Cả hai phần của vấn đề hiện được biết là không thể thực hiện được; và vấn đề không thể giải quyết được giờ đây đã mất đi tất cả sự quan tâm đặc biệt về thực tế hoặc lý thuyết, bị cuốn hút vào những ý tưởng rộng lớn hơn.

Sau phần lạc đề này về giá trị của π, bây giờ chúng ta quay lại

câu hỏi về định nghĩa chung về độ lớn của một góc, để có thể tạo ra một góc tương ứng với bất kỳ giá trị nào u. Giả sử một điểm chuyển động, Q, bắt đầu từ A trên OX (*xem* Hình 27) và quay theo chiều dương hướng (ngược chiều kim đồng hồ, trong hình được xem xét) quanh chu vi của vòng tròn trong một số lần bất kỳ, cuối cùng dừng tại một điểm bất kỳ, *ví dụ* tại P hoặc P' hoặc P'' hoặc P'''. Sau đó, tổng chiều dài của đường tròn cong đi qua, chia cho bán kính của hình tròn, r, là định nghĩa tổng quát của một góc dương có kích thước *bất kỳ*. Đặt x, y là tọa độ của điểm mà điểm Q nằm tức là tại một trong bốn vị trí thay thế được đề cập trong Hình 27; x and y (như được sử dụng ở đây) sẽ hoặc là be x and y hoặc x' and y hoặc x' và y', hoặc x và y'. Khi đó dấu của góc tổng quát này là $\frac{y}{r}$ và cosin của nó là $\frac{x}{r}$. Với những định nghĩa này, các quan hệ hàm $v = \sin u$ và $w = \cos u$, cuối cùng được xác định cho tất cả các giá trị thực dương của u. Đối với các giá trị âm của u, chúng ta chỉ cần quay Q theo hướng ngược lại (theo chiều kim đồng hồ); nhưng không đáng để chúng ta giải thích thêm về điểm này, vì bây giờ phương pháp chung của quy trình đã được giải thích.

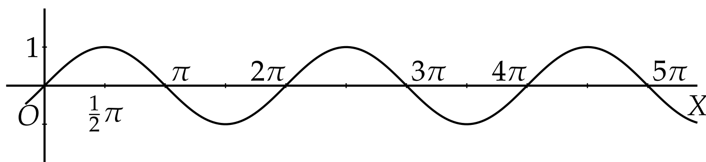
Các chức năng của sin và cosin, như được định nghĩa như vậy, cho phép chúng ta xử lý các vấn đề liên quan đến tam giác mà từ đó Lượng giác đã xuất hiện. Nhưng giờ đây chúng ta có thể liên hệ Lượng giác với ý tưởng rộng hơn về Tính tuần hoàn mà tầm quan trọng của đã được giải thích trong chương trước. Dễ thấy rằng các hàm $\sin u$ và $\cos u$ là các hàm tuần hoàn của u. Để xét vị trí, P (trong Hình 27), của một điểm chuyển động, Q, xuất phát từ A và quay quanh đường tròn. Vị trí này, P, đánh dấu các góc $\frac{\text{arc } AP}{r}$, và $2\pi + \frac{\text{arc } AP}{r}$, và 4 $pi + \frac{\text{arc } AP}{r}$ và $6\pi + \frac{\text{arc } AP}{r}$, v.v. Bây giờ, tất cả các góc này có cùng sin và cosin, cụ thể là $\frac{y}{r}$ and $\frac{x}{r}$. Do đó, dễ dàng thấy rằng, nếu u được chọn để có bất kỳ giá trị nào, thì các đối số u and $2\pi + u$ và $4\pi + u$, và $6\pi + u$, và $8\pi + u$, v.v. vô thời hạn, có tất cả các giá trị giống nhau cho các sin và

cosin tương ứng. Nói cách khác,

$$\sin u = \sin(2\pi + u) = \sin(4\pi + u) = \sin(6\pi + u) = \text{etc.};$$
$$\cos u = \cos(2\pi + u) = \cos(4\pi + u) = \cos(6\pi + u) = \text{etc.}$$

Thực tế này được thể hiện bằng cách nói rằng $\sin u$ và $\cos u$ là các hàm tuần hoàn với chu kỳ của chúng bằng 2π.

Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (lưu ý rằng bây giờ chúng ta bỏ v and u để dùng y and x quen thuộc hơn) được hiển thị trong Hình 28. Chúng tôi lấy trục x bất kỳ độ dài tùy ý nào tùy ý để biểu thị số π và trên trục y bất kỳ độ dài tùy ý nào tùy ý để biểu diễn số 1. Các giá trị số của sin và cosin không bao giờ có thể vượt quá đơn vị. Sự lặp lại của hình sau các khoảng thời gian 2π sẽ được chú ý. Biểu đồ này đại diện cho kiểu hàm tuần hoàn đơn giản nhất, trong đó tất cả những kiểu khác được xây dựng. Cosine về cơ bản không có gì khác với sin. Vì thật dễ dàng để chứng minh rằng $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; do đó có thể thấy rằng đồ thị của $\cos x$ chỉ đơn giản là Hình 28 được sửa đổi bởi vẽ trục của OY qua điểm trên OX được đánh dấu $\frac{\pi}{2}$, thay vì vẽ nó ở vị trí thực của nó trên hình.



Hình 28.

Thật dễ dàng để xây dựng một hàm 'sine' trong đó khoảng thời gian có bất kỳ giá trị được gán nào a. Vì chúng ta chỉ cần viết

$$y = \sin\frac{2\pi x}{a},$$

và sau đó

$$\sin\frac{2\pi(x+a)}{a} = \sin\left(\frac{2\pi x}{a} + 2\pi\right) = \sin\frac{2\pi x}{a}.$$

Vì vậy, khoảng thời gian của chức năng mới này bây giờ là a. Bây giờ chúng ta hãy đưa ra định nghĩa chung về ý nghĩa của hàm tuần hoàn . Hàm $f(x)$ là hàm tuần hoàn, với chu kỳ là a, nếu (i) với *bất kỳ* giá trị nào của x thì ta có $f(x) = f(x+a)$, và (ii) không có số nào b nhỏ hơn a sao cho *bất kỳ* giá trị của x, $f(x) = f(x+b)$.

Mệnh đề thứ hai được đưa vào định nghĩa bởi vì khi chúng ta có $\sin \frac{2\pi x}{a}$, nó không chỉ tuần hoàn trong khoảng thời gian a, mà còn trong khoảng thời gian $2a$ và $3a$, v.v.; điều này phát sinh kể từ khi

$$\sin \frac{2\pi(x+3a)}{a} = \sin\left(\frac{2\pi x}{a} + 6\pi\right) = \sin \frac{2\pi x}{a}.$$

Vì vậy, nó là khoảng thời gian nhỏ nhất mà chúng tôi muốn nắm giữ và gọi là *chu kỳ* của hàm số. Phần lớn lý thuyết trừu tượng về các hàm tuần hoàn và toàn bộ các ứng dụng của lý thuyết này vào Khoa học Vật lý bị chi phối bởi một định lý quan trọng gọi là Định lý Fourier; cụ thể là, nếu $f(x)$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ a và nếu $f(x)$ cũng thỏa mãn một số điều kiện, mà thực tế luôn được giả định trước trong các hàm do tự nhiên đề xuất hiện tượng, thì $f(x)$ có thể được viết dưới dạng tổng của một tập hợp các số hạng ở dạng

$$c_0 + c_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{a} + e_1\right) + c_2 \sin\left(\frac{4\pi x}{a} + e_2\right) + c_3 \sin\left(\frac{6\pi x}{a} + e_3\right) + \cdots$$

Trong công thức này c_0, c_1, c_2, c_3, etc., và cả e_1, e_2, e_3, v.v., là các hằng số, được chọn sao cho phù hợp với chức năng cụ thể. Một lần nữa chúng ta phải hỏi, Có bao nhiêu thuật ngữ phải được chọn? Và ở đây nảy sinh một khó khăn mới: vì chúng ta có thể chứng minh rằng, mặc dù trong một số trường hợp cụ thể, một số xác định sẽ đúng, nhưng nói chung, tất cả những gì chúng ta có thể làm là ước tính giá trị của hàm càng gần càng tốt bằng cách

lấy nhiều hơn và nhiều hơn nữa. điều kiện. Quá trình xấp xỉ dần dần này đưa chúng ta đến việc xem xét lý thuyết về chuỗi vô hạn, một phần thiết yếu của lý thuyết toán học mà chúng ta sẽ xem xét trong chương tiếp theo.

Phương pháp biểu thị hàm tuần hoàn ở trên dưới dạng tổng các sin được gọi là "phân tích điều hòa" của hàm. Ví dụ, tại bất kỳ điểm nào trên bờ biển, thủy triều lên xuống theo chu kỳ. Như vậy tại một điểm gần eo biển Dover sẽ có hai đợt thủy triều hàng ngày do trái đất quay. Sự lên xuống hàng ngày của thủy triều rất phức tạp bởi thực tế là có hai đợt thủy triều, một đợt tiến lên Kênh tiếng Anh và đợt kia đã quét qua phía Bắc của Scotland, sau đó đi xuống phía nam xuống Biển Bắc. Một lần nữa, một số thủy triều cao cao hơn những thủy triều khác: điều này là do Mặt trời cũng có ảnh hưởng tạo ra thủy triều giống như Mặt trăng. Bằng cách này, hàng tháng và các khoảng thời gian khác được giới thiệu. Chúng tôi không tính đến ảnh hưởng đặc biệt của gió không thể lường trước được. Vấn đề chung của phân tích điều hòa thủy triều là tìm các tập hợp thuật ngữ giống như các tập hợp thuật ngữ trong biểu thức Trang 123 ở trên, sao cho mỗi tập hợp sẽ đưa ra với độ chính xác gần đúng sự đóng góp của ảnh hưởng tạo thủy triều của một "thời gian" đến độ cao của thủy triều bất cứ lúc nào. Do đó, đối số x sẽ là *thời gian* được tính từ bất kỳ điểm bắt đầu thuận tiện nào.

Một lần nữa, chuyển động rung động của dây đàn violon cũng được đưa vào phân tích điều hòa tương tự, và các dao động của ether và không khí cũng vậy, tương ứng với sóng ánh sáng và sóng âm thanh. Chúng ta đang ở đây trước sự hiện diện của một trong những quá trình cơ bản của vật lý toán học— cụ thể là, không gì khác hơn là phương pháp chung của nó để giải quyết sự kiện tự nhiên vĩ đại của Tính tuần hoàn.

CHƯƠNG XIV

CHUỖI

Phần NO của môn Toán chịu nhiều ảnh hưởng từ do sự tầm thường của phần trình bày ban đầu cho người mới bắt đầu hơn là chủ đề tuyệt vời của chuỗi. Hai ví dụ nhỏ về chuỗi, cụ thể là chuỗi số học và chuỗi hình học, được xem xét; những ví dụ này rất quan trọng vì chúng là những ví dụ đơn giản nhất của một lý thuyết tổng quát quan trọng. Nhưng những ý tưởng chung không bao giờ được tiết lộ; và do đó, các ví dụ, không minh họa gì cả, bị giảm xuống thành những điều tầm thường ngớ ngẩn.

Ý tưởng toán học chung của một chuỗi là ý tưởng về một tập hợp các sự vật được sắp xếp theo thứ tự, tức là theo thứ tự; Ý nghĩa này được thể hiện chính xác trong cách sử dụng phổ biến của thuật ngữ này. Ví dụ, hãy xem xét loạt Thủ tướng Anh trong thế kỷ 19, được sắp xếp theo thứ tự nhiệm kỳ đầu tiên của họ tại chức vụ đó trong thế kỷ. Chuỗi bắt đầu với William Pitt và kết thúc với Lord Rosebery, người, khá phù hợp, là người viết tiểu sử của thành viên đầu tiên. Chúng tôi có thể đã xem xét các đơn đặt hàng nối tiếp khác để sắp xếp những người này; ví dụ, theo chiều cao hoặc cân nặng của họ. Những mệnh lệnh được đề xuất khác này đối với chúng tôi là tầm thường liên quan đến các Thủ tướng, và sẽ không tự nhiên xuất hiện trong tâm trí; nhưng về mặt trừu tượng, chúng cũng là những mệnh lệnh tốt như bất kỳ mệnh lệnh nào khác. Khi một thứ tự trong số các thuật ngữ quan trọng hơn rất nhiều hoặc rõ ràng hơn các thứ tự khác, nó thường được gọi là *thứ tự* của các thuật ngữ đó. Do đó *thứ tự* của các số nguyên sẽ luôn được hiểu là thứ tự của chúng được sắp xếp theo thứ tự độ lớn. Nhưng tất nhiên là có vô số cách khác để sắp xếp chúng. Khi số phần tử đang xét là hữu hạn thì số cách sắp xếp chúng theo thứ tự gọi là số các hoán vị của chúng. Số hoán vị của một tập hợp n thứ, trong đó n là một số nguyên hữu hạn, là

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1,$$

nghĩa là, nó là tích của n số nguyên đầu tiên; tích này quan trọng trong toán học đến mức một biểu tượng đặc biệt được sử dụng cho nó, và nó luôn được viết là 'n!.' Vì vậy, $2! = 2 \times 1 = 2$, và $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, và $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, và $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Khi n tăng, giá trị của n! tăng rất nhanh; do đó, 100! lớn gấp một trăm lần 99!.

Dễ dàng kiểm chứng trong trường hợp các giá trị nhỏ của n thì n! là số cách sắp xếp n thứ theo thứ tự. Do đó, hãy xem xét hai điều a và b; những thứ này có khả năng thực hiện hai lệnh ab và ba, và $2! = 2$.

Một lần nữa, lấy ba thứ a, b, và c; những thứ này có khả năng thực hiện sáu đơn đặt hàng, abc, acb, bac, bca, cab, cba và $3! = 6$. Tương tự như vậy đối với 24 đơn đặt hàng trong đó có thể sắp xếp bốn thứ a, b, c và d.

Khi chúng ta đến với các tập hợp vô hạn—như tập hợp của tất cả các số nguyên, hoặc tất cả các phân số, hoặc tất cả các số thực chẳng hạn—chúng ta ngay lập tức gặp phải sự phức tạp của lý thuyết về các loại trật tự. Chủ đề này đã được đề cập trong Chương VI. trong việc xem xét các thứ tự có thể có của các số nguyên, của các phân số và của các số thực. Toàn bộ câu hỏi về các loại trật tự tạo thành một nhánh toán học tương đối mới có tầm quan trọng lớn. Chúng tôi sẽ không xem xét nó nữa. Tất cả các chuỗi vô hạn mà chúng ta xem xét bây giờ đều thuộc cùng một loại thứ tự như các số nguyên được sắp xếp theo thứ tự độ lớn tăng dần, cụ thể là, với số hạng đầu tiên và sao cho mỗi số hạng có một vài hàng xóm bên cạnh, một hàng xóm ở hai bên. , ngoại trừ thuật ngữ đầu tiên, tất nhiên, chỉ có một hàng xóm bên cạnh. Do đó, nếu m là một số nguyên bất kỳ (không phải số 0), thì sẽ luôn có một số hạng mth . Một chuỗi có số hữu hạn (giả sử n terms) có các đặc điểm giống như các hàng xóm kế bên được coi là một chuỗi vô hạn; nó chỉ khác với chuỗi vô hạn ở chỗ có số hạng cuối cùng, cụ thể là, thứ n.

Điều quan trọng cần làm với một dãy số—sử dụng cho "chuỗi" tương lai theo nghĩa hạn chế vừa được đề cập—là cộng

các số hạng kế tiếp của nó lại với nhau.

Do đó, nếu $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ lần lượt là 1st, 2nd, 3rd, 4th, ..., nth, ... các số hạng của một dãy số, ta lần lượt tạo thành dãy số u_1, $u_1 + u_2$, $u_1 + u_2 + u_3$, $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, và như thế; do đó, tổng của 1st n số hạng có thể được viết

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n.$$

Nếu chuỗi chỉ có một số hữu hạn các số hạng , thì cuối cùng, theo cách này, chúng ta sẽ tìm được tổng của cả chuỗi số hạng. Nhưng, nếu chuỗi có vô số số hạng, thì quá trình lập liên tiếp tổng các số hạng này không bao giờ chấm dứt; và theo nghĩa này, không có cái gọi là tổng của một chuỗi vô hạn.

Nhưng tại sao việc cộng các số hạng của một chuỗi theo cách này một cách liên tục lại quan trọng? Câu trả lời là chúng ta đang ở đây tượng trưng cho quá trình tinh thần cơ bản của sự xấp xỉ. Đây là một quá trình có ý nghĩa vượt xa ngoài các lĩnh vực toán học. Trí tuệ hạn chế của chúng tôi không thể xử lý tất cả các tài liệu phức tạp cùng một lúc và phương pháp sắp xếp của chúng tôi là phương pháp gần đúng. Chính khách khi định hình bài phát biểu của mình đặt các vấn đề chính lên hàng đầu và để các chi tiết rơi vào vị trí phụ của chúng một cách tự nhiên. Tất nhiên, có một phương pháp nghệ thuật ngược lại để chuẩn bị trí tưởng tượng bằng cách trình bày các chi tiết phụ hoặc đặc biệt, rồi dần dần tăng lên đến mức khủng hoảng. Theo cả hai cách, quá trình này là một trong những tổng kết dần dần của các hiệu ứng; và đây chính xác là những gì được thực hiện bằng cách tính tổng liên tiếp các số hạng của một chuỗi. Phương pháp nêu số thông thường của chúng ta là một quá trình tính tổng dần dần, ít nhất là trong trường hợp các số lớn. Do đó, $568,213$ hiện ra trong tâm trí dưới dạng:—

$$500,000 + 60,000 + 8,000 + 200 + 10 + 3.$$

Trong trường hợp phân số thập phân, điều này càng rõ ràng

hơn. Do đó, 3, 14159 là:—

$$3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{9}{100000}.$$

Ngoài ra, 3 và $3+\frac{1}{10}$ và $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}$ và $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}$ và $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{5}{10000}$ là các giá trị gần đúng liên tiếp của kết quả đầy đủ 3, 14159. Nếu chúng ta đọc ngược 568.213 từ phải sang trái, bắt đầu bằng 3 đơn vị, chúng ta sẽ đọc nó một cách nghệ thuật, dần dần chuẩn bị tinh thần cho cuộc khủng hoảng 500.000.

Quá trình thông thường của phép nhân số tiến hành bằng cách tính tổng của một chuỗi, Xem xét phép tính

$$\begin{array}{r} 342 \\ \underline{658} \\ 2736 \\ 1710 \\ \underline{2052} \\ 225036 \end{array}$$

Do đó, ba dòng được thêm vào tạo thành một chuỗi trong đó số hạng đầu tiên là dòng trên. Sê-ri này tuân theo phương pháp nghệ thuật để trình bày thuật ngữ quan trọng nhất cuối cùng, không phải vì bất kỳ cảm giác nghệ thuật nào, mà vì sự tiện lợi có được bằng cách giữ vững vị trí của các đơn vị, do đó cho phép chúng tôi bỏ qua một số 0, cần thiết về mặt hình thức.

Nhưng khi chúng ta xấp xỉ bằng cách dần dần cộng các số hạng liên tiếp của một chuỗi vô hạn, thì chúng ta đang xấp xỉ bằng gì? Khó khăn là dãy số không có "tổng" theo nghĩa đơn giản của từ này, bởi vì thao tác cộng các số hạng của nó lại với nhau không bao giờ có thể hoàn thành. Câu trả lời là chúng ta đang tính gần đúng *limit* tổng của chuỗi và bây giờ chúng ta phải tiến hành giải thích "giới hạn" của một chuỗi là gì.

Tổng của một chuỗi xấp xỉ với một giới hạn khi tổng của bất kỳ số hạng nào của nó, miễn là số đó đủ lớn, gần bằng giới hạn mà bạn muốn tiếp cận. Nhưng sự mô tả này về ý nghĩa của việc

xấp xỉ tới một giới hạn rõ ràng sẽ không chịu được sự xem xét kỹ lưỡng của toán học hiện đại. *đủ lớn*, *gần bằng* và *quan tâm tiếp cận* nghĩa là gì? Tất cả những cụm từ mơ hồ này phải được giải thích dưới dạng những ý tưởng trừu tượng đơn giản mà chỉ có toán học thuần túy mới được thừa nhận.

Đặt các số hạng liên tiếp của chuỗi là $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n$, v.v. , do đó u_n là nth số hạng của chuỗi. Ngoài ra, đặt s_n là tổng của 1st n số hạng, bất kể n có thể là gì. Vậy nên:—

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \text{and}$$
$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n.$$

Sau đó, các số hạng $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ tạo thành một chuỗi mới và sự hình thành của chuỗi này là quá trình tổng hợp của chuỗi ban đầu. Sau đó, "xấp xỉ" *tổng* của chuỗi ban đầu thành "giới hạn" có nghĩa là "xấp xỉ *số hạng* của chuỗi mới này tới một giới hạn." Và chúng ta có ngay bây giờ để giải thích ý nghĩa của từ gần đúng với giới hạn của các số hạng của một chuỗi.

Bây giờ, khi ghi nhớ định nghĩa (được đưa ra trong Chương XII.) của *tiêu chuẩn của phép xấp xỉ*, ý tưởng về giới hạn có nghĩa là: l là giới hạn của các số hạng của chuỗi $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$, nếu, tương ứng với mỗi số thực k, được lấy làm tiêu chuẩn của phép xấp xỉ, thì có thể tìm thấy một số hạng s_n của chuỗi sao cho tất cả các số hạng tiếp theo (tức là s_{n+1}, s_{n+2}, v.v.) xấp xỉ l trong tiêu chuẩn xấp xỉ đó. Nếu một tiêu chuẩn khác nhỏ hơn k^1 được chọn, thuật ngữ s_n có thể ở quá sớm trong chuỗi và thuật ngữ muộn hơn s_m với thuộc tính trên sẽ là tìm.

Nếu thuộc tính này đúng, thì rõ ràng là khi bạn tiếp tục chuỗi $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$, dấu chấm từ trái sang phải, sau một thời gian, bạn nhận ra *tất cả* trong số đó gần với l hơn bất kỳ số nào mà bạn có thể muốn chỉ định. Nói cách khác, bạn tính gần đúng với l bao nhiêu tùy thích. Mối liên hệ chặt chẽ giữa định nghĩa về giới hạn của một chuỗi với định nghĩa về hàm số liên tục được cho trong Chương XI. sẽ được nhận ra ngay lập tức.

Sau đó quay lại chuỗi ban đầu $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, giới hạn

của các điều khoản của chuỗi $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$, được gọi là "tổng đến vô cùng" của loạt phim gốc. Nhưng rõ ràng là việc sử dụng từ "tổng" này là rất giả tạo và chúng ta không được thừa nhận các tính chất tương tự với các tính chất của tổng thông thường của một số hữu hạn các số hạng mà không có một cuộc điều tra đặc biệt nào.

Chúng ta hãy xem xét một ví dụ về "tổng đến vô cùng." Hãy xem xét số thập phân tuần hoàn .1111 . . . . Số thập phân này chỉ là một cách tượng trưng cho "tổng đến vô cùng" của chuỗi .1, .01, .001, .0001, v.v. Chuỗi tương ứng được tìm thấy bằng cách tính tổng là $s_1 = .1$, $s_2 = .11$, $s_3 = .111$, $s_4 = .1111$, v.v. Giới hạn của các điều khoản trong chuỗi này là $\frac{1}{9}$; điều này dễ dàng nhận thấy bằng phép chia đơn giản, cho

$$\frac{1}{9} = .1 + \frac{1}{90} = .11 + \frac{1}{900} = .111 + \frac{1}{9000} = \text{etc.}$$

Do đó, nếu $\frac{3}{17}$ được đưa ra (k của định nghĩa), .1 and *tất cả* số hạng tiếp theo sẽ khác với $\frac{1}{9}$ ít hơn $\frac{3}{17}$; nếu $\frac{1}{1000}$ được đưa ra (một lựa chọn khác cho k của định nghĩa), .111 và tất cả các số hạng tiếp theo khác với $\frac{1}{9}$ nhỏ hơn $\frac{1}{1000}$; v.v., bất kỳ lựa chọn nào cho k được thực hiện.

Rõ ràng là không có điều gì đã được đề cập đưa ra ý tưởng dù là nhỏ nhất về cách tìm "tổng bằng vô cực" của một chuỗi. Chúng tôi chỉ đơn thuần nêu các điều kiện mà một con số như vậy phải đáp ứng. Thật vậy, một phương pháp chung để tìm trong mọi trường hợp tổng đến vô cùng của một chuỗi về bản chất là không thể, vì lý do đơn giản là một "tổng" như vậy, như được định nghĩa ở đây, không phải lúc nào cũng tồn tại. Dãy có tổng bằng vô cùng được gọi là *hội tụ* và những chuỗi không có tổng bằng vô cực được gọi là *phân kỳ*.

Một ví dụ rõ ràng về chuỗi phân kỳ là 1, 2, 3, . . . , n . . . , tức là chuỗi số nguyên theo thứ tự độ lớn của chúng. Đối với bất kỳ số nào l, bạn cố gắng lấy tổng của nó đến vô cùng, và bất kỳ tiêu chuẩn xấp xỉ nào k mà bạn chọn, bằng cách lấy đủ các số hạng của chuỗi, bạn luôn có thể làm cho tổng của chúng khác l nhiều

hơn hơn k. Một lần nữa, một ví dụ khác về chuỗi phân kỳ là 1, 1, 1, v.v., tức là chuỗi mà mỗi số hạng bằng 1. Khi đó tổng của n số hạng là n, và tổng này tăng không giới hạn khi n tăng. Một lần nữa, một ví dụ khác về chuỗi phân kỳ là 1, −1, 1, −1, 1, −1, v.v., tức là chuỗi trong đó các số hạng thay phiên nhau 1 và −1. Tổng của một số lẻ các số hạng là 1 và của một số chẵn các số hạng là 0. Do đó, các số hạng của chuỗi $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ không gần đúng đến một giới hạn, mặc dù chúng không tăng lên mà không có giới hạn.

Có thể giả sử rằng điều kiện để $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ có tổng bằng vô cùng là rằng u_n sẽ giảm vô thời hạn khi n tăng. Toán học sẽ là một môn khoa học dễ dàng hơn nhiều so với hiện tại, nếu đây là trường hợp. Thật không may giả định là không đúng sự thật.

Ví dụ như loạt

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \ldots, \quad \frac{1}{n}, \ldots$$

là khác nhau. Thật dễ dàng để thấy rằng đây là trường hợp; để xem xét tổng của n số hạng bắt đầu từ số hạng thứ $(n+1)$. Các n thuật ngữ này là $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \ldots$ Add, $\frac{1}{2n}$: có n trong số đó và $\frac{1}{2n}$ là ít nhất trong số đó. Do đó, tổng của chúng lớn hơn n lần $\frac{1}{2n}$, *tức là* lớn hơn $\frac{1}{2}$. Bây giờ, không làm thay đổi tổng thành vô cùng, nếu nó tồn tại, chúng ta có thể cộng các số hạng lân cận lại với nhau và thu được chuỗi

$$1, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}, \quad \ldots,$$

nghĩa là, theo những gì đã nói ở trên, một chuỗi có các số hạng sau 2nd lớn hơn các số hạng của chuỗi,

$$1, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \ldots,$$

trong đó tất cả các số hạng sau số hạng đầu tiên đều bằng nhau. Nhưng loạt bài này là khác nhau. Do đó, chuỗi ban đầu là phân kỳ.*

**Xem* Ghi chú C, p. 163.

Câu hỏi về sự phân kỳ này cho thấy chúng ta phải cẩn thận như thế nào khi lập luận từ tính chất của tổng một số hữu hạn các số hạng với tổng của một chuỗi vô hạn. Vì tính chất cơ bản nhất của một số hữu hạn các số hạng là tất nhiên chúng có một tổng: nhưng ngay cả tính chất cơ bản này cũng không nhất thiết phải có trong một chuỗi vô hạn. Sự thận trọng này chỉ nói rằng chúng ta không được đánh lừa bởi gợi ý về thuật ngữ kỹ thuật "*tổng* của một chuỗi vô hạn." Người ta thường chỉ ra tổng của chuỗi vô hạn

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots, \quad u_n, \ldots$$

bởi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots.$$

Bây giờ chúng ta chuyển sang khái quát hóa ý tưởng về một chuỗi, mà toán học, đúng với phương pháp của nó, tạo ra bằng cách sử dụng biến số. Cho đến nay, chúng ta mới chỉ xem xét các chuỗi trong đó mỗi số hạng xác định là một số xác định. Nhưng chúng ta cũng có thể khái quát hóa và biến mỗi số hạng thành một biểu thức toán học nào đó chứa một biến x. Vì vậy, chúng ta có thể xem xét chuỗi $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ và chuỗi

$$x, \quad \frac{x^2}{2}, \quad \frac{x^3}{3}, \ldots, \quad \frac{x^n}{n}, \ldots.$$

Để tượng trưng cho ý tưởng chung của bất kỳ hàm nào như vậy, hãy tưởng tượng một hàm của x, $f_n(x)$ giả sử, bao gồm trong sự hình thành của nó một số nguyên biến n, sau đó, bởi cho n các giá trị 1, 2, 3, v.v., liên tiếp, ta được chuỗi

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \ldots, \quad f_n(x), \ldots.$$

Một chuỗi như vậy có thể hội tụ đối với một số giá trị của x và phân kỳ đối với các giá trị khác. Trên thực tế, khá hiếm khi tìm thấy một chuỗi liên quan đến một biến x hội tụ cho tất cả các giá trị của x,—ít nhất trong bất kỳ trường hợp cụ thể nào, rất không an toàn khi cho rằng đây là biến trường hợp. Ví dụ: chúng ta hãy

xem xét trường hợp đơn giản nhất trong tất cả các trường hợp, cụ thể là chuỗi "hình học"

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \ldots, \quad x^n, \ldots.$$

Tổng của n số hạng được cho bởi

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n.$$

Bây giờ nhân cả hai bên với x và chúng tôi nhận được

$$xs_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + x^{n+1}.$$

Bây giờ trừ dòng cuối cùng từ dòng trên và chúng tôi nhận được

$$s_n(1-x) = s_n - xs_n = 1 - x^{n+1},$$

và do đó (nếu x be không bằng 1)

$$s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Bây giờ, nếu x nhỏ hơn 1 về mặt số học, thì với các giá trị đủ lớn của n, $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ luôn luôn là nhỏ hơn k, tuy nhiên k được chọn. Do đó, nếu x nhỏ hơn 1 về mặt số lượng, chuỗi $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ là hội tụ và $\frac{1}{1-x}$ là giới hạn của nó. Tuyên bố này được tượng trưng bởi

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots, \quad (-1 < x < 1).$$

Nhưng nếu x lớn hơn 1 về mặt số hoặc bằng 1 về mặt số, thì chuỗi phân kỳ. Nói cách khác, nếu x nằm giữa -1 và $+1$, thì chuỗi hội tụ; nhưng nếu x bằng -1 hoặc $+1$, hoặc nếu x nằm ngoài khoảng -1 to $+1$, thì chuỗi phân kỳ. Do đó, chuỗi hội tụ tại tất cả "điểm" trong khoảng -1 to $+1$, không bao gồm các điểm cuối.

Ở giai đoạn này của cuộc điều tra của chúng tôi một câu hỏi khác phát sinh. Giả sử rằng chuỗi

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots$$

hội tụ với mọi giá trị của x nằm trong khoảng a to b, tức là chuỗi này hội tụ với mọi giá trị của x lớn hơn a và nhỏ hơn b. Ngoài ra, giả sử chúng ta muốn chắc chắn rằng khi xấp xỉ đến giới hạn, chúng ta cộng các số hạng đủ với nhau để nằm trong một tiêu chuẩn xấp xỉ nào đó k. Chúng ta có thể luôn nêu một số số hạng không, chẳng hạn như n, sao cho nếu chúng ta lấy n hoặc nhiều số hạng khác để tạo thành tổng, thì *sao cũng được* giá trị x có trong khoảng thời gian chúng tôi đã thỏa mãn tiêu chuẩn gần đúng mong muốn?

Đôi khi chúng ta có thể và đôi khi chúng ta không thể làm điều này cho mỗi giá trị của k. Khi có thể, chuỗi được gọi là hội tụ đều trong khoảng và khi không thể làm như vậy, chuỗi được gọi là không hội tụ đều trong khoảng. Nó tạo ra sự khác biệt lớn đối với các tính chất của một chuỗi cho dù nó có hội tụ đều hay không qua một khoảng. Hãy để chúng tôi minh họa vấn đề bằng ví dụ đơn giản nhất và những con số đơn giản nhất.

Xét chuỗi hình học

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots.$$

Nó hội tụ trong suốt khoảng -1 to $+1$, không bao gồm các giá trị cuối $x = \pm 1$.

Nhưng nó không hội tụ đều trong khoảng này. Vì nếu $s_n(x)$ là tổng của n số hạng, chúng ta đã chứng minh rằng sự khác biệt giữa $s_n(x)$ và giới hạn $\frac{1}{1-x}$ là $\frac{x^{n+1}}{1-x}$. Bây giờ, giả sử n là một số hạng bất kỳ, chẳng hạn như 20, và đặt k là bất kỳ tiêu chuẩn gần đúng được chỉ định nào, chẳng hạn như .001. Sau đó, bằng cách lấy x gần đủ để $+1$ hoặc gần đủ với -1, chúng ta có thể tạo ra giá trị bằng số của $\frac{x^{21}}{1-x}$ lớn hơn .001. Do đó, các điều khoản 20 sẽ

không thực hiện trong toàn bộ khoảng thời gian, mặc dù nó là quá đủ trong một số phần của khoảng thời gian đó.

Lý do tương tự có thể được áp dụng cho bất kỳ số nào khác mà chúng tôi lấy thay vì 20 và bất kỳ tiêu chuẩn xấp xỉ nào thay vì ,001. Do đó, chuỗi hình học $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots$ hội tụ không đều trên khoảng *toàn bộ* -1 của nó đến $+1$. Nhưng nếu chúng ta lấy bất kỳ khoảng nhỏ hơn nào nằm ở cả hai đầu của khoảng -1 to $+1$, thì chuỗi hình học sẽ hội tụ đều trong khoảng đó. Ví dụ: lấy khoảng 0 to $+\frac{1}{10}$. Sau đó, bất kỳ giá trị nào cho n làm cho $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ nhỏ hơn về số lượng so với *k at* các giới hạn này cho x cũng phục vụ đối với tất cả các giá trị của x nằm giữa các giới hạn này, vì điều đó xảy ra là $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ giảm dần về giá trị số cũng như x giảm dần về giá trị số. Ví dụ: lấy $k = .001$; sau đó, đặt $x = \frac{1}{10}$, chúng tôi tìm thấy:—

$$\text{với } n = 1, \quad \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{1-\frac{1}{10}} = \tfrac{1}{90} = .0111\ldots,$$

$$\text{với } n = 2, \quad \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{1-\frac{1}{10}} = \tfrac{1}{900} = .00111\ldots,$$

$$\text{với } n = 3, \quad \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{1-\frac{1}{10}} = \tfrac{1}{9000} = .000111\ldots.$$

Do đó, ba số hạng sẽ đủ cho toàn bộ khoảng thời gian, , tuy nhiên, tất nhiên, đối với một số phần của khoảng thời gian, điều đó là nhiều hơn mức cần thiết. Lưu ý rằng, bởi vì $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$ hội tụ (mặc dù không đồng nhất) trong khoảng -1 to $+1$, cho mỗi giá trị của x trong khoảng có thể tìm thấy một số số hạng n thỏa mãn tiêu chuẩn xấp xỉ mong muốn; nhưng, khi chúng ta lấy x càng lúc càng gần giá trị cuối $+1$ hoặc -1, các giá trị lớn hơn và lớn hơn của n phải được sử dụng.

Thật tò mò là sự khác biệt quan trọng giữa hội tụ đều và không đều này mãi đến năm 1847 mới được Stokes công bố—sau đó, Sir George Stokes—và sau đó, độc lập vào năm 1850 bởi

Seidel , một toán học người Đức.

Các điểm tới hạn, nơi xuất hiện sự hội tụ không đều, không nhất thiết phải nằm ở các giới hạn của khoảng mà sự hội tụ tồn tại. Đây là một chuyên ngành thuộc dòng hình học.

Trong trường hợp chuỗi hình học $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$, có thể cho một biểu thức đại số đơn giản $\frac{1}{1-x}$ giới hạn của nó trong khoảng hội tụ. Nhưng đây không phải là luôn luôn như vậy. Thông thường, chúng ta có thể chứng minh một chuỗi hội tụ trong một khoảng nhất định, mặc dù chúng ta không biết gì thêm về giới hạn của nó ngoại trừ đó là giới hạn của chuỗi. Nhưng đây là một cách rất hay để xác định hàm; *nghĩa là*. là giới hạn của một chuỗi hội tụ vô hạn, và trên thực tế, là cách mà hầu hết các hàm số được xác định hoặc phải được xác định.

Do đó, chuỗi quan trọng nhất trong phép phân tích cơ bản là

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

trong đó $n!$ có ý nghĩa được định nghĩa trước đó trong chương này. Chuỗi này có thể được chứng minh là hội tụ tuyệt đối đối với các giá trị *tất cả* của x, và hội tụ đều trong bất kỳ khoảng nào mà ta muốn lấy. Do đó, nó có tất cả các tính chất toán học thoải mái mà một chuỗi nên có. Nó được gọi là chuỗi hàm mũ. Biểu thị tổng của nó đến vô cùng bằng $\exp x$. Như vậy, theo định nghĩa,

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

$\exp x$ được gọi là hàm mũ.

Khá dễ dàng để chứng minh, với một ít kiến thức về toán cơ bản, rằng

$$(A) \qquad (\exp x) \times (\exp y) = \exp(x + y).$$

nói cách khác mà

$$(\exp x) \times (\exp y)$$
$$= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \ldots.$$

Tính chất này (A) là một ví dụ về cái gọi là định lý cộng. Khi bất kỳ hàm nào [say $f(x)$] đã được xác định, điều đầu tiên chúng ta làm là cố gắng biểu diễn $f(x+y)$ dưới dạng các hàm đã biết của x only, và các chức năng đã biết của y only. Nếu chúng ta có thể làm như vậy, kết quả được gọi là một định lý bổ sung. Định lý bổ sung đóng một vai trò quan trọng trong phân tích toán học. Do đó, định lý bổ sung cho sin được đưa ra bởi

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

và cho cosin bởi

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Trên thực tế, cách tốt nhất để xác định $\sin x$ và $\cos x$ không phải bằng các phương pháp hình học phức tạp của chương trước, mà là các giới hạn tương ứng của chuỗi

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{etc.}\ldots,$$

và

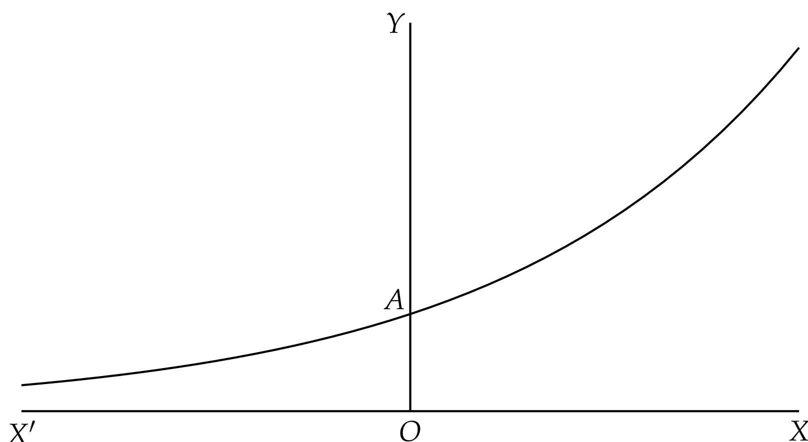
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \text{etc.}\ldots,$$

để chúng tôi đặt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{etc.}\ldots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \text{etc.}\ldots.$$

Các định nghĩa này tương đương với các định nghĩa hình học, và cả hai chuỗi có thể được chứng minh là hội tụ với mọi giá trị

của x, và hội tụ đều trong mọi khoảng. Các chuỗi này cho sin và cosin có điểm giống chung với chuỗi hàm mũ đã cho ở trên. Trên thực tế, chúng có mối liên hệ mật thiết với nó bằng lý thuyết về số ảo được giải thích trong các Chương VII. và VIII.

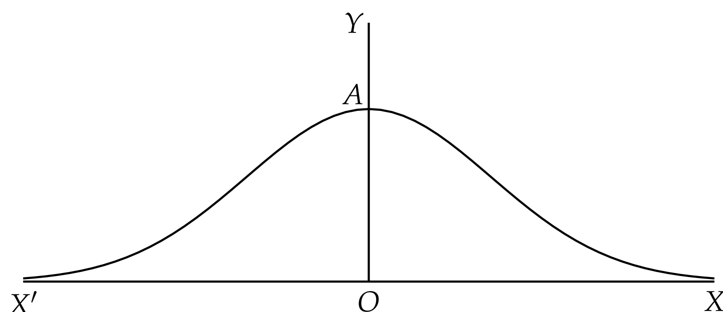


Hình 29.

Đồ thị của hàm số mũ được cho trong Hình 29. Nó cắt trục OY tại điểm $y = 1$, rõ ràng là nó phải cắt, vì khi $x = 0$, mọi phần tử của chuỗi ngoại trừ phần tử đầu tiên đều bằng không. Tầm quan trọng của hàm số mũ là nó đại diện cho bất kỳ đại lượng vật lý thay đổi nào mà tốc độ tăng tại bất kỳ thời điểm nào là một tỷ lệ phần trăm đồng nhất của giá trị của nó tại thời điểm đó. Đối với ví dụ , biểu đồ trên biểu thị quy mô tại bất kỳ thời điểm nào của dân số có tỷ lệ sinh đồng đều, tỷ lệ tử vong đồng đều và không có di cư, trong đó x tương ứng với thời gian được tính từ bất kỳ phương tiện nào. ngày và y đại diện cho dân số theo tỷ lệ phù hợp. Thang đo phải sao cho OA đại diện cho dân số tại ngày được lấy làm gốc. Nhưng ở đây chúng ta nảy ra ý tưởng về "tỷ lệ gia tăng", đó là chủ đề của chương tiếp theo.

Một hàm quan trọng gần như liên quan đến hàm mũ được tìm thấy bằng cách đặt $-x^2$ cho x làm đối số trong hàm mũ. Do đó, chúng tôi nhận được $\exp(-x^2)$. Đồ thị $y = \exp(-x^2)$ được cho trong Hình 30.

Đường cong, giống như một chiếc mũ nghiêng, được gọi là

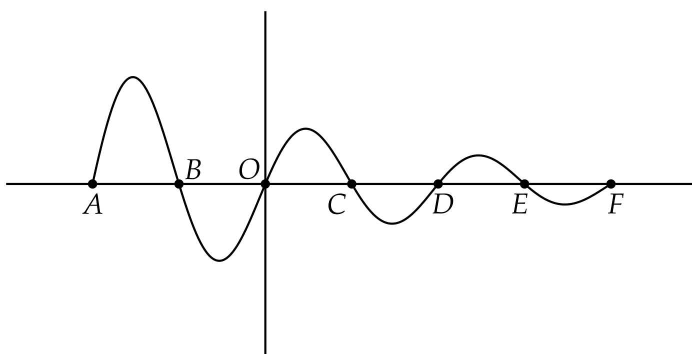


Hình 30.

đường cong của sai số thông thường. Hàm tương ứng của nó cực kỳ quan trọng đối với lý thuyết thống kê và trong nhiều trường hợp cho chúng ta biết loại sai lệch so với kết quả trung bình mà chúng ta mong đợi.

Một hàm quan trọng khác được tìm thấy bằng cách kết hợp hàm mũ với sin, theo cách này:—

$$y = \exp(-cx) \times \sin\frac{2\pi x}{p}.$$



Hình 31.

Đồ thị của nó được cho trong Hình 31. Các điểm A, B, O, C, D, E, F, được đặt cách đều nhau $\frac{1}{2}p$, và một loạt chúng bất tận nên được vẽ xuôi và ngược. Chức năng này đại diện cho sự biến mất của các rung động dưới ảnh hưởng của lực ma sát hoặc lực

"giảm chấn". Ngoài ma sát, các dao động sẽ có chu kỳ, với chu kỳ p; nhưng ảnh hưởng của lực ma sát làm cho biên độ của mỗi dao động nhỏ hơn biên độ của lần trước theo một tỷ lệ phần trăm không đổi của biên độ đó. Sự kết hợp giữa ý tưởng về "tính chu kỳ" (yêu cầu sin hoặc cosin cho biểu tượng của nó) và "tỷ lệ phần trăm không đổi" (yêu cầu hàm mũ cho biểu tượng của nó) là lý do cho dạng của hàm này, cụ thể là dạng của nó dưới dạng tích của hàm sin thành hàm mũ.

CHƯƠNG XV

PHÉP TÍNH VI PHÂN

VIỆC phát minh ra phép tính vi phân đánh dấu một cuộc khủng hoảng trong lịch sử toán học. Sự tiến bộ của khoa học được phân chia giữa các thời kỳ được đặc trưng bởi sự tích lũy chậm các ý tưởng và các thời kỳ, do tư liệu mới cho tư duy được thu thập một cách kiên nhẫn như vậy, một thiên tài nào đó nhờ phát minh ra một phương pháp mới hoặc một quan điểm mới, đột nhiên biến đổi thế giới. toàn bộ chủ đề lên cấp độ cao hơn. Những giai đoạn tương phản này trong tiến trình của lịch sử tư tưởng được Shelley so sánh với sự hình thành của một trận tuyết lở.

Trận tuyết lở đánh thức mặt trời! có khối lượng,
Ba lần sàng lọc bởi cơn bão, đã tập hợp ở đó
Hết vảy này đến vảy khác,—trong tâm trí bất chấp thiên đàng
Khi suy nghĩ này qua suy nghĩ khác được chất đống, cho đến khi
một số sự thật vĩ đại
Được nới lỏng, và các quốc gia vang vọng,
. . . .

Việc so sánh sẽ chịu một số bức xúc. Tia nắng cuối cùng đánh thức trận tuyết lở không nhất thiết phải vượt quá cường độ so với các sức mạnh khác của tự nhiên đã chủ trì quá trình hình thành chậm chạp của nó. Điều này cũng đúng trong khoa học. Thiên tài có may mắn tạo ra ý tưởng cuối cùng làm biến đổi cả một vùng tư tưởng, không nhất thiết phải xuất sắc hơn tất cả những người đi trước, những người đã làm việc trong quá trình hình thành ý tưởng sơ bộ. Khi xem xét lịch sử khoa học, thật ngớ ngẩn và vô ơn khi chỉ giới hạn sự ngưỡng mộ của chúng ta bằng một sự ngạc nhiên không thể hiểu nổi đối với những người đàn ông đã đạt được những bước tiến cuối cùng hướng tới một kỷ nguyên mới.

Trong trường hợp cụ thể trước chúng ta, đối tượng đã có một lịch sử lâu dài trước khi nó có hình thức cuối cùng dưới bàn tay của hai nhà phát minh. Có một số dấu vết về các phương pháp

của nó ngay cả trong số các nhà toán học Hy Lạp, và cuối cùng, ngay trước khi thực sự sản xuất ra chủ đề này, Fermat (sinh năm 1601 SCN, và mất năm 1665 SCN), một nhà toán học nổi tiếng người Pháp , đã cải tiến những ý tưởng trước đó đến mức chủ đề này hoàn toàn do anh ấy tạo ra. Fermat cũng có thể tuyên bố mình là người cùng phát minh ra hình học tọa độ cùng với người đồng hương và đương thời của ông, Descartes. Trên thực tế, chính Descartes là người mà thế giới khoa học đã tiếp nhận những ý tưởng mới, nhưng Fermat chắc chắn đã đến với chúng một cách độc lập.

Tuy nhiên, chúng ta không cần phải ngừng ngưỡng mộ Newton hay Leibniz. Newton là một nhà toán học và là sinh viên ngành khoa học vật lý, Leibniz là một nhà toán học và một triết gia, và mỗi người trong số họ trong lĩnh vực tư tưởng của mình đều là một trong những thiên tài vĩ đại nhất mà thế giới từng biết đến. Phát minh chung là nguyên nhân của một tranh chấp đáng tiếc và không mấy đáng tin cậy. Newton đã sử dụng các phương pháp của Fluxions, như ông gọi chủ đề này, vào năm 1666, và sử dụng nó trong tác phẩm *Principia* của mình, mặc dù trong tác phẩm như đã in, mọi ký hiệu đại số đặc biệt đều bị tránh. Nhưng ông đã không in một tuyên bố trực tiếp về phương pháp của mình cho đến 1693. Leibniz công bố tuyên bố đầu tiên của mình vào 1684. Anh ta bị bạn bè của Newton buộc tội là đã lấy nó từ một MS. của Newton, mà ông đã được xem một cách riêng tư. Leibniz cũng cáo buộc Newton đã ăn cắp ý tưởng của ông. Bây giờ không có nhiều nghi ngờ nhưng cả hai nên có công là những người khám phá độc lập. Đối tượng đã đến giai đoạn chín muồi để khám phá, và không có gì đáng ngạc nhiên khi hai người đàn ông có khả năng như vậy đã độc lập tìm ra nó.

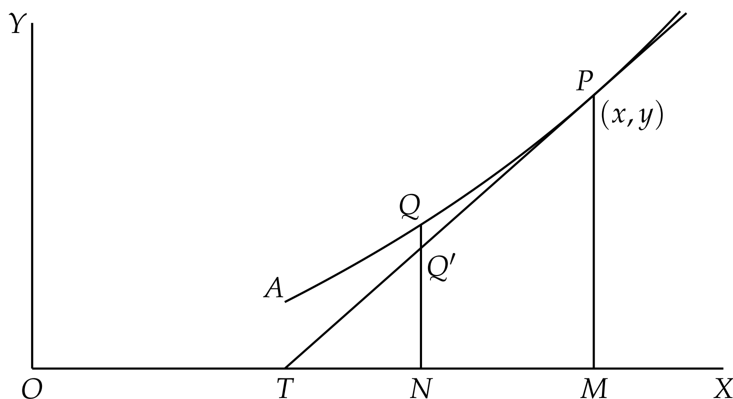
Những khám phá chung này khá phổ biến trong khoa học. Các khám phá nói chung không được thực hiện trước khi chúng được dẫn dắt bởi xu hướng tư tưởng trước đó, và vào thời điểm đó, nhiều bộ óc đang theo đuổi ý tưởng quan trọng một cách nóng bỏng. Nếu chúng ta chỉ tập trung vào những khám phá liên

quan đến người Anh , thì việc Darwin và Wallace đưa ra đồng thời quy luật chọn lọc tự nhiên, và việc đồng thời khám phá ra Neptune của Adams và nhà thiên văn học người Pháp, Leverrier, ngay lập tức xuất hiện trong đầu tôi. Các tranh chấp, về việc ai nên được ghi công, thường bị ảnh hưởng bởi tinh thần chủ nghĩa dân tộc không xứng đáng. Sự phản ánh thực sự đầy cảm hứng mà lịch sử toán học gợi ra là sự thống nhất về tư duy và mối quan tâm giữa những người thuộc rất nhiều thời đại, rất nhiều quốc gia và rất nhiều chủng tộc. Người Ấn Độ, người Ai Cập, người Assyria, người Hy Lạp, người Ả Rập, người Ý, người Pháp, người Đức, người Anh và người Nga, tất cả đều đã có những đóng góp thiết yếu cho sự tiến bộ của khoa học. Chắc chắn rằng sự tán dương một cách ghen tị đối với sự đóng góp của một quốc gia cụ thể không phải để thể hiện tinh thần lớn hơn.

Tầm quan trọng của phép tính vi phân phát sinh từ chính bản chất của chủ đề, đó là việc xem xét một cách có hệ thống tốc độ tăng của các hàm. Ý tưởng này ngay lập tức được trình bày cho chúng tôi bằng cách nghiên cứu về tự nhiên; vận tốc là tốc độ tăng của quãng đường đi được, còn gia tốc là tốc độ tăng của vận tốc. Do đó, ý tưởng cơ bản về sự thay đổi, vốn là nền tảng cho toàn bộ nhận thức của chúng ta về các hiện tượng, ngay lập tức gợi ra câu hỏi về tốc độ thay đổi. Các thuật ngữ quen thuộc của "nhanh chóng" và "từ từ" có ý nghĩa từ một tham chiếu ngầm về tỷ lệ thay đổi. Do đó, phép tính vi phân liên quan đến chính chìa khóa của vị trí mà từ đó toán học có thể được áp dụng thành công để giải thích quá trình tự nhiên.

Ý tưởng về tốc độ thay đổi này chắc chắn đã có trong đầu Newton và được thể hiện trong ngôn ngữ mà ông dùng để giải thích chủ đề này. Tuy nhiên, người ta có thể nghi ngờ liệu quan điểm này, bắt nguồn từ các hiện tượng tự nhiên, có bao giờ nằm trong tâm trí của các nhà toán học đi trước, những người đã chuẩn bị cho chủ đề này cho sự ra đời của nó hay không. Họ quan tâm đến những vấn đề trừu tượng hơn về vẽ tiếp tuyến với đường cong, tìm độ dài của đường cong và tìm diện tích bao

quanh bởi đường cong. hai bài toán cuối cùng, về chỉnh lưu các đường cong và cầu phương của các đường cong như chúng được đặt tên, thuộc về Phép tính tích phân, mà tuy nhiên cũng liên quan đến chủ đề chung giống như Phép tính vi phân .



Hình 32.

Sự ra đời của hình học tọa độ làm cho hai quan điểm kết hợp với nhau. Đối với (*xem* Hình 32) gọi AQP là một đường cong bất kỳ và gọi PT là tiếp tuyến tại điểm P trên đó. Đặt các trục tọa độ là OX và OY; và đặt $y = f(x)$ là phương trình của đường cong, sao cho $OM = x$ và $PM = y$. Bây giờ, đặt Q là bất kỳ điểm chuyển động nào trên đường cong, với tọa độ x_1, y_1; thì $y_1 = f(x_1)$. Và gọi Q' là điểm trên tiếp tuyến có cùng trục hoành x_1; giả sử tọa độ của Q' là x_1 và y'. Bây giờ, giả sử rằng N di chuyển dọc theo trục OX từ trái sang phải với vận tốc không đổi; thì dễ dàng thấy rằng tung độ y' của điểm Q' trên tiếp tuyến TP cũng tăng đều khi Q' di chuyển dọc theo tiếp tuyến theo một cách tương ứng. Trên thực tế, dễ dàng thấy rằng tỷ lệ giữa tốc độ tăng của $Q'N$ với tốc độ tăng của ON bằng tỷ lệ của $Q'N$ với TN, đó là như nhau tại mọi điểm thuộc đường thẳng. Nhưng tốc độ tăng của QN, tức là tốc độ tăng của $f(x_1)$, thay đổi từ điểm này sang điểm khác của đường cong miễn là nó không thẳng. Khi Q đi qua điểm P, tốc độ tăng của $f(x_1)$ (trong đó x_1 trùng với x tại thời điểm này) bằng với tốc độ tăng của y' trên tiếp tuyến của P. Do đó, nếu chúng ta có một phương pháp chung để xác định tốc độ tăng của một

hàm $f(x)$ của một biến x, thì chúng ta có thể xác định hệ số góc của tiếp tuyến tại bất kỳ điểm nào (x, y) trên một đường cong và từ đó có thể vẽ nó. Do đó, các bài toán vẽ tiếp tuyến với một đường cong và xác định tốc độ tăng của một hàm thực sự giống hệt nhau.

Cần lưu ý rằng, giống như trong các trường hợp của Mặt cắt hình nón và Lượng giác, quan điểm nào giả tạo hơn trong hai quan điểm là quan điểm mà chủ đề đã nổi lên. Khía cạnh thực sự cơ bản của khoa học chỉ nổi lên tương đối muộn trong ngày. Đó là một sự khái quát lịch sử có cơ sở vững chắc, rằng điều cuối cùng được khám phá trong bất kỳ ngành khoa học nào là khoa học đó thực sự hướng về cái gì. Con người tiếp tục mò mẫm trong nhiều thế kỷ, chỉ được hướng dẫn bởi một bản năng lờ mờ và một sự tò mò bối rối, cho đến khi cuối cùng "một sự thật vĩ đại nào đó được tiết lộ."

Chúng ta hãy lấy một số trường hợp đặc biệt để làm quen với loại ý tưởng mà chúng ta muốn làm cho chính xác. Một đoàn tàu đang chuyển động—làm thế nào để xác định vận tốc của nó tại một thời điểm nào đó, chẳng hạn như vào buổi trưa? Chúng ta có thể lấy một khoảng thời gian năm phút bao gồm cả buổi trưa và đo xem đoàn tàu đã đi được bao xa trong khoảng thời gian đó. Giả sử chúng ta thấy nó dài năm dặm, khi đó chúng ta có thể kết luận rằng đoàn tàu đang chạy với tốc độ 60 dặm một giờ. Nhưng năm dặm là một quãng đường dài, và chúng ta không thể chắc chắn rằng chỉ vào buổi trưa, đoàn tàu đã di chuyển với tốc độ này. Vào buổi trưa, nó có thể đã chạy được 70 dặm/giờ và sau đó có thể đã bật brake. Sẽ an toàn hơn nếu làm việc với khoảng thời gian ngắn hơn, chẳng hạn như một phút, bao gồm cả buổi trưa, và để đo khoảng không gian đi qua trong khoảng thời gian đó. Nhưng đối với một số mục đích, độ chính xác cao hơn có thể được yêu cầu và một phút có thể là quá dài. Trong thực tế, sự không chính xác cần thiết của các phép đo của chúng ta khiến cho việc lấy một khoảng thời gian quá nhỏ để đo là vô ích. Nhưng về lý thuyết, khoảng thời gian càng nhỏ càng tốt, và

chúng ta muốn nói rằng để đạt được độ chính xác lý tưởng thì cần phải có một khoảng thời gian vô cùng nhỏ. Các nhà toán học lớn tuổi hơn, đặc biệt là Leibniz, không chỉ bị cám dỗ mà còn bị cám dỗ và đã nói ra điều đó. Ngay cả bây giờ nó vẫn là một kiểu nói hữu ích, miễn là chúng ta biết cách diễn giải nó thành ngôn ngữ thông thường. Thật tò mò rằng, khi trình bày về cơ sở của phép tính, Newton, nhà khoa học tự nhiên, triết học hơn nhiều so với Leibniz, nhà triết học, và mặt khác, Leibniz đã cung cấp một ký hiệu đáng ngưỡng mộ rất cần thiết cho sự tiến bộ. của môn học.

Bây giờ hãy lấy một ví dụ khác trong lĩnh vực toán học thuần túy. Chúng ta hãy tiếp tục tìm tốc độ tăng của hàm x^2 cho bất kỳ giá trị nào x của đối số của nó. Chúng ta vẫn chưa thực sự xác định được ý nghĩa của tốc độ gia tăng. Chúng tôi sẽ cố gắng nắm bắt ý nghĩa của nó liên quan đến trường hợp cụ thể này. Khi x tăng lên $x + h$, thì hàm x^2 tăng lên $(x+h)^2$; sao cho tổng mức tăng là $(x+h)^2 - x^2$, do mức tăng h trong đối số. Do đó, trong suốt khoảng x to $(x+h)$, mức tăng trung bình của hàm trên mỗi đơn vị tăng của đối số là $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$. Nhưng mà

$$(x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2,$$

và do đó

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h.$$

Do đó, $2x + h$ là mức tăng trung bình của hàm x^2 trên mỗi đơn vị tăng trong đối số, mức trung bình được lấy theo khoảng x to $x + h$. Nhưng $2x + h$ phụ thuộc vào h, độ lớn của khoảng. Rõ ràng là chúng ta sẽ nhận được những gì chúng ta muốn, cụ thể là *rate* tăng tại giá trị x của đối số, bằng cách giảm dần h ngày càng nhiều. Do đó *trong giới hạn* khi h có *giảm vô hạn*, chúng ta nói rằng $2x$ là tốc độ tăng của x^2 tại giá trị x của đối số.

Ở đây, một lần nữa, rõ ràng chúng ta đang chống lại ý tưởng về số lượng nhỏ vô hạn khi sử dụng từ "trong giới hạn khi h đã giảm vô hạn". những thứ như số lượng vô cùng nhỏ, và tất nhiên

là những số vô cùng nhỏ tương ứng với chúng. Ngôn ngữ và ý tưởng của Newton thiên về đường lối hiện đại hơn; nhưng anh ấy đã không thành công trong việc giải thích vấn đề một cách rõ ràng như vậy để rõ ràng là làm được nhiều việc hơn là giải thích các ý tưởng của Leibniz bằng ngôn ngữ khá gián tiếp. Lời giải thích thực sự của chủ đề này lần đầu tiên được đưa ra bởi Weierstrass và Trường toán học Berlin vào khoảng giữa thế kỷ XIX. Nhưng giữa Leibniz và Weierstrass, một tài liệu phong phú, cả toán học và triết học, đã phát triển xung quanh những đại lượng nhỏ vô hạn bí ẩn này mà toán học đã khám phá ra và triết học tiến hành giải thích. Ví dụ, một số triết gia, Bishop Berkeley, đã phủ nhận một cách chính xác giá trị của toàn bộ ý tưởng, mặc dù vì những lý do khác với những lý do được chỉ ra ở đây. Nhưng một thực tế gây tò mò vẫn là, bất chấp mọi lời chỉ trích về nền tảng của chủ đề này, không còn nghi ngờ gì nữa, quy trình toán học về cơ bản là đúng. Trên thực tế, đối tượng đã đúng, mặc dù những lời giải thích là sai. Chính khả năng đúng này, mặc dù với những giải thích hoàn toàn sai về những gì đang được thực hiện, thường khiến bên ngoài chỉ trích — điều đó có nghĩa là ngăn chặn việc theo đuổi một phương pháp — đặc biệt là cằn cỗi và vô ích trong sự tiến bộ của khoa học. Bản năng của những người quan sát được đào tạo và cảm giác tò mò của họ, do thực tế là họ rõ ràng đang tìm hiểu điều gì đó, là những hướng dẫn an toàn hơn nhiều. Dù sao đi nữa, hiệu quả chung của sự thành công của Phép tính vi phân là tạo ra một lượng lớn triết học tồi, xoay quanh ý tưởng về cái vô cùng nhỏ. Dấu tích của đoạn văn dài dòng này vẫn có thể được tìm thấy trong phần giải thích của nhiều sách giáo khoa toán cơ bản về Phép tính vi phân. Có một quy tắc an toàn để áp dụng rằng, khi một tác giả toán học hoặc triết học viết với một sự sâu sắc mơ hồ, thì anh ta đang nói những điều vô nghĩa.

Newton hẳn đã diễn đạt câu hỏi bằng cách nói rằng, khi h tiến tới 0, trong giới hạn $2x + h$ trở thành $2x$. Nhiệm vụ của chúng ta là giải thích phát biểu này để chứng tỏ rằng trên thực tế nó không ngầm thừa nhận sự tồn tại của các đại lượng vô cùng nhỏ của

Leibniz. Khi đọc qua phương pháp phát biểu của Newton, bạn sẽ muốn tìm kiếm sự đơn giản bằng cách nói rằng $2x + h$ bằng $2x$, khi h bằng không. Nhưng điều này sẽ không xảy ra; vì nó do đó xóa bỏ khoảng từ x đến $x + h$, trong đó mức tăng trung bình được tính toán. Vấn đề là, làm thế nào để giữ một khoảng có độ dài h để tính toán mức tăng trung bình, đồng thời coi h như thể nó bằng không. Newton đã làm điều này bằng khái niệm về giới hạn, và bây giờ chúng ta tiếp tục đưa ra lời giải thích của Weierstrass về ý nghĩa thực sự của nó.

Đầu tiên, hãy lưu ý rằng, khi thảo luận về $2x + h$, chúng ta đã xem xét x là giá trị cố định và h là thay đổi. Nói cách khác, x đã được coi là biến hoặc tham số "hằng số", như được giải thích trong Chương IX.; và chúng tôi đã thực sự xem xét $2x + h$ như một hàm của đối số h. Do đó, chúng ta có thể khái quát hóa câu hỏi có sẵn và hỏi ý chúng ta là gì khi nói rằng hàm $f(h)$ có xu hướng tới giới hạn l, chẳng hạn như đối số của nó h có xu hướng tới giá trị bằng không. Nhưng một lần nữa chúng ta sẽ thấy rằng giá trị đặc biệt *zero* cho đối số không thuộc về bản chất của chủ thể; và một lần nữa, chúng tôi khái quát hóa hơn nữa, và hỏi, ý chúng tôi là gì khi nói rằng hàm $f(h)$ có xu hướng tới giới hạn l vì h có xu hướng tới giá trị a.

Bây giờ, theo cách giải thích của Weierstrassian, toàn bộ ý tưởng về h quan tâm đến giá trị a, mặc dù nó đưa ra một loại hình ảnh ẩn dụ về những gì chúng ta đang hướng tới, thực sự hoàn toàn không phù hợp. Thật vậy, khá rõ ràng rằng, miễn là chúng tôi giữ lại bất kỳ thứ gì như "h có xu hướng đến a," như một ý tưởng cơ bản, thì chúng tôi thực sự đang ở trong nanh vuốt của cái vô cùng nhỏ bé; vì chúng tôi ngụ ý khái niệm h ở gần vô tận với a. Đây chỉ là những gì chúng tôi muốn thoát khỏi.

Theo đó, một lần nữa chúng tôi sẽ trình bày lại cụm từ của mình để được giải thích và hỏi ý chúng tôi là gì khi nói rằng giới hạn của hàm $f(h)$ tại a là l.

Giới hạn của $f(h)$ tại a là một thuộc tính của vùng lân cận của a, trong đó "vùng lân cận" được sử dụng theo nghĩa được

định nghĩa trong Chương XI. trong khi thảo luận về tính liên tục của các hàm. Giá trị của hàm $f(h)$ tại a là $f(a)$; nhưng giới hạn có ý nghĩa khác với giá trị, và có thể khác với nó, và có thể tồn tại khi giá trị chưa được xác định. Chúng ta cũng sẽ sử dụng thuật ngữ "tiêu chuẩn xấp xỉ" theo nghĩa mà nó được định nghĩa trong Chương XI. Trên thực tế, trong định nghĩa về "tính liên tục" được đưa ra ở cuối chương đó, chúng tôi đã xác định một cách thực tế một giới hạn. Định nghĩa của một giới hạn là:—

Hàm $f(x)$ có giới hạn l tại giá trị a của đối số x, khi ở lân cận a thì giá trị của nó xấp xỉ l trong *mọi* tiêu chuẩn gần đúng.

So sánh định nghĩa này với định nghĩa đã được đưa ra về tính liên tục, cụ thể là:—

Hàm $f(x)$ liên tục tại giá trị a của đối số, khi ở lân cận của a thì giá trị của nó xấp xỉ với giá trị của nó tại a trong *mọi* tiêu chuẩn của xấp xỉ.

Rõ ràng là một hàm số liên tục tại a khi (i) nó có giới hạn tại a, và (ii) giới hạn đó bằng với giá trị của nó tại a. Do đó, minh họa về tính liên tục được đưa ra ở cuối Chương XI. là minh họa cho ý tưởng về giới hạn, cụ thể là, tất cả chúng đều hướng đến việc chứng minh rằng $f(a)$ là giới hạn của $f(x)$ at a cho các chức năng được xem xét và giá trị của a được xem xét. Việc xét giới hạn tại điểm mà hàm số không liên tục sẽ thực sự hữu ích hơn. Ví dụ, xét hàm số có đồ thị trong Hình 20 của Chương XI. Hàm này $f(x)$ được định nghĩa để có giá trị 1 cho tất cả các giá trị của đối số ngoại trừ các số nguyên 0, 1, 2, 3, v.v., và đối với các giá trị tích phân này, nó có giá trị 0. Bây giờ chúng ta hãy nghĩ về giới hạn của nó khi $x = 3$. Chúng tôi nhận thấy rằng trong định nghĩa của giới hạn, giá trị của hàm tại a (trong trường hợp này, $a = 3$) bị loại trừ. Tuy nhiên, ngoại trừ $f(3)$, các giá trị của $f(x)$, khi x nằm trong bất kỳ khoảng nào mà (i) chứa 3 không phải là điểm cuối và (ii) không mở rộng đến mức 2 và 4, tất cả đều bằng 1; và do đó, các giá trị này xấp xỉ với 1 trong mọi tiêu chuẩn xấp xỉ. Do đó 1 là giới hạn của $f(x)$ tại giá trị 3 của đối số x, nhưng theo định nghĩa thì $f(3) = 0$.

Đây là một ví dụ về hàm sở hữu cả giá trị và giới hạn tại giá trị 3 của đối số, nhưng giá trị không bằng giới hạn. Ở cuối Chương XI. hàm x^2 được xem xét ở giá trị 2 của đối số. Giá trị của nó tại 2 là 2^2, tức là 4, và người ta đã chứng minh rằng giới hạn của nó cũng là 4. Do đó, ở đây chúng ta có một hàm có giá trị và giới hạn bằng nhau.

Cuối cùng, chúng ta đi đến trường hợp về cơ bản là quan trọng cho các mục đích của chúng ta, cụ thể là, đối với một hàm có giới hạn, nhưng không có giá trị xác định tại một giá trị nhất định của đối số của nó. Chúng ta không cần phải đi đâu xa để tìm một hàm như vậy, $\frac{2x}{x}$ sẽ phục vụ mục đích của chúng ta. Bây giờ trong bất kỳ cuốn sách toán học nào, chúng ta có thể tìm thấy phương trình, $\frac{2x}{x} = 2$, được viết mà không do dự hay bình luận. Nhưng có một khó khăn trong việc này; khi x bằng 0, $\frac{2x}{x} = \frac{0}{0}$; và $\frac{0}{0}$ không có nghĩa xác định. Do đó, giá trị của hàm $\frac{2x}{x}$ tại $x = 0$ không có ý nghĩa xác định. Nhưng đối với mọi giá trị khác của x, giá trị của hàm $\frac{2x}{x}$ là 2. Do đó, giới hạn của $\frac{2x}{x}$ tại $x = 0$ là 2 và nó không có giá trị tại $x = 0$. Tương tự, giới hạn của $\frac{x^2}{x}$ tại $x = a$ là a bất kể a có thể là gì, do đó giới hạn của $\frac{x^2}{x}$ tại $x = 0$ là 0. Nhưng giá trị của $\frac{x^2}{x}$ tại $x = 0$ có dạng $\frac{0}{0}$, không có nghĩa xác định. Do đó, hàm $\frac{x^2}{x}$ có giới hạn nhưng không có giá trị tại 0.

Bây giờ chúng ta quay trở lại vấn đề mà từ đó chúng ta bắt đầu cuộc thảo luận này về bản chất của một giới hạn. Làm thế nào chúng ta sẽ xác định tốc độ tăng của hàm x^2 tại bất kỳ giá trị nào x của đối số của nó. Câu trả lời của chúng tôi là tốc độ tăng này là giới hạn của hàm $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ tại giá trị 0 cho đối số của nó h. (Lưu ý rằng x ở đây là một "hằng số.") Chúng ta hãy xem

câu trả lời này hoạt động như thế nào theo định nghĩa của chúng ta về giới hạn. Chúng ta có

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h}.$$

Bây giờ, khi tìm giới hạn của $\dfrac{h(2x+h)}{h}$ tại giá trị 0 của đối số h, giá trị (nếu có) của hàm tại $h = 0$ được loại trừ. Nhưng đối với tất cả các giá trị của h, ngoại trừ $h = 0$, chúng ta có thể chia hết cho h. Do đó, giới hạn của $\dfrac{h(2x+h)}{h}$ tại $h = 0$ giống với giới hạn của $2x + h$ tại $h = 0$. Bây giờ, bất kể tiêu chuẩn xấp xỉ nào k mà chúng tôi chọn sử dụng, bằng cách xem xét khoảng từ $-\frac{1}{2}k$ đến $+\frac{1}{2}k$, chúng tôi thấy rằng, đối với các giá trị h nằm trong nó, $2x + h$ khác với $2x$ nhỏ hơn $\frac{1}{2}k$, nghĩa là nhỏ hơn k. Điều này đúng với tiêu chuẩn *bất kỳ* k. Do đó, trong vùng lân cận của giá trị 0 cho h, $2x + h$ xấp xỉ $2x$ trong tiêu chuẩn xấp xỉ *every*, và do đó $2x$ là giới hạn của $2x + h$ tại $h = 0$. Do đó, theo những gì đã nói ở trên $2x$ là giới hạn của $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ tại giá trị 0 cho h . Do đó, suy ra rằng $2x$ là cái mà chúng ta gọi là tốc độ tăng của x^2 tại giá trị x của đối số. Do đó, phương pháp này đưa chúng ta đến cùng tốc độ tăng cho x^2 giống như cách Leibnizian tạo ra h grow "nhỏ vô cùng".

Các thuật ngữ trừu tượng hơn "hệ số vi phân" hoặc "hàm suy ra" thường được được sử dụng cho cái mà từ trước đến nay chúng ta vẫn gọi là "tốc độ tăng" của một hàm số. Định nghĩa chung như sau: hệ số vi phân của hàm $f(x)$ là giới hạn, nếu nó tồn tại, của hàm $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ của đối số h tại giá trị 0 của đối số của nó.

Làm thế nào chúng ta, theo định nghĩa này và định nghĩa phụ về giới hạn, thực sự xoay sở để tránh được khái niệm "các số vô hạn nhỏ" vốn đã khiến các bậc tiền bối toán học của chúng ta lo lắng đến vậy? Khó khăn nảy sinh đối với họ bởi vì một mặt họ phải sử dụng khoảng x đến $x + h$ để tính mức tăng trung bình,

mặt khác, cuối cùng họ muốn đặt $h = 0$. Kết quả là dường như chúng đã rơi vào khái niệm về một khoảng tồn tại có kích thước bằng không. Bây giờ làm thế nào để chúng ta tránh được khó khăn này? Theo cách này—chúng ta sử dụng khái niệm tương ứng với *bất kỳ* tiêu chuẩn xấp xỉ nào, khoảng *một số* với các thuộc tính như vậy và như vậy có thể được tìm thấy. Sự khác biệt là chúng ta đã nắm bắt được tầm quan trọng của khái niệm "biến" và họ đã không làm như vậy. Do đó, khi kết thúc phần giải thích các khái niệm cơ bản của phân tích toán học, chúng tôi được dẫn trở lại những ý tưởng mà trong Chương II. chúng tôi đã bắt đầu cuộc điều tra của mình—rằng trong toán học về cơ bản ý tưởng quan trọng là ý tưởng về "*một số* điều" và "*bất kỳ* điều."

CHƯƠNG XVI

HÌNH HỌC

HÌNH HỌC, giống như phần còn lại của toán học, là trừu tượng. Trong đó, các thuộc tính của hình dạng và vị trí tương đối của sự vật được nghiên cứu. Nhưng chúng ta không cần xem xét ai đang quan sát sự vật, hoặc liệu người đó có quen thuộc với chúng bằng cách nhìn, sờ hoặc nghe hay không. Nói tóm lại, chúng tôi bỏ qua tất cả các cảm giác cụ thể. Hơn nữa, những thứ cụ thể như Tòa nhà Quốc hội, hoặc địa cầu trên mặt đất đều bị bỏ qua. Mọi mệnh đề đề cập đến bất kỳ sự vật nào có tính chất hình học như vậy và như vậy. Tất nhiên nó giúp ích cho trí tưởng tượng của chúng ta khi xem xét các ví dụ cụ thể về hình cầu, hình nón, hình tam giác và hình vuông. Nhưng các mệnh đề không chỉ áp dụng cho các số liệu thực tế được in trong cuốn sách, mà còn cho bất kỳ số liệu nào như vậy.

Vì vậy, hình học, giống như đại số, bị chi phối bởi những ý tưởng về "bất kỳ" và "một số" sự vật. Ngoài ra, theo cách tương tự, nó nghiên cứu mối tương quan của các tập hợp sự vật. Ví dụ, xét hai tam giác bất kỳ ABC và DEF.

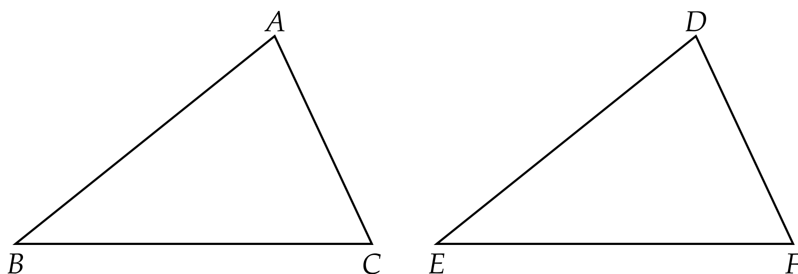
Mối quan hệ nào phải tồn tại giữa một số các phần của các tam giác này để các tam giác có thể bằng nhau về mọi mặt? Đây là một trong những cuộc điều tra đầu tiên được thực hiện trong tất cả các hình học cơ bản. Đây là một nghiên cứu về một tập hợp nhất định các mối tương quan có thể có giữa hai tam giác. Câu trả lời là các tam giác bằng nhau về mọi mặt, nếu:— Hoặc, (a) Hai cạnh của góc này và góc xen giữa lần lượt bằng hai cạnh của góc kia và góc xen giữa:

Hoặc, (b) Hai góc của một và cạnh bên nối chúng lần lượt bằng hai góc còn lại và cạnh bên nối chúng:

Hoặc, (c) Ba cạnh của hình này bằng ba cạnh của hình kia.

Câu trả lời này ngay lập tức gợi ý một cuộc điều tra thêm. Nêu tính chất tương quan giữa các tam giác khi ba góc của tam

giác này bằng ba góc của tam giác kia? Nghiên cứu sâu hơn này dẫn chúng ta đến toàn bộ lý thuyết về sự tương đồng (*xem* Chương XIII.), đây là một loại tương quan khác. Một lần nữa,



Hình 33.

để lấy một ví dụ khác, hãy xem xét cấu trúc bên trong của tam giác ABC. Các cạnh và góc của nó có quan hệ với nhau—góc lớn hơn thì đối diện với cạnh lớn hơn và các góc ở đáy của tam giác cân bằng nhau. Nếu chúng ta tiến hành lượng giác, mối tương quan này nhận được một xác định chính xác hơn trong hình dạng quen thuộc

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, với hai công thức đồng dạngæ.

Ngoài ra còn có một mối tương quan đơn giản hơn nữa giữa các góc của tam giác, đó là tổng của chúng bằng hai góc vuông; và giữa ba cạnh, cụ thể là tổng độ dài của hai cạnh bất kỳ lớn hơn độ dài của cạnh thứ ba.

Do đó, phương pháp thực sự để nghiên cứu hình học là nghĩ về những hình đơn giản thú vị, chẳng hạn như hình tam giác, hình bình hành và hình tròn, đồng thời khảo sát mối tương quan giữa các phần khác nhau của chúng. Nhà hình học không có trong đầu một mệnh đề tách rời, mà là một hình với các bộ phận khác nhau của nó phụ thuộc lẫn nhau. Cũng giống như trong đại số, anh ấy tổng quát hóa tam giác thành đa giác và cạnh bên thành tiết diện hình nón. Hoặc, theo một con đường ngược lại, ông phân loại các tam giác theo các cạnh đều, cân, hoặc tỷ lệ, và

các đa giác theo số cạnh của chúng, và các mặt cắt hình nón theo các hyperbolas, elip hoặc parabolas.

Các ví dụ trước minh họa các ý tưởng cơ bản của hình học giống hệt như các ý tưởng của đại số như thế nào; ngoại trừ việc đại số xử lý các con số và hình học với các đường thẳng, góc, diện tích và các thực thể hình học khác. Sự đồng nhất cơ bản này là một trong những lý do tại sao rất nhiều chân lý hình học có thể được đưa vào một chiếc váy đại số. Do đó, nếu A, B, và C lần lượt là số độ trong các góc của tam giác ABC, thì tương quan giữa các góc được biểu diễn bằng phương trình

$$A + B + C = 180;$$

và nếu a, b, c lần lượt là số feet ở ba cạnh, thì mối tương quan giữa các cạnh được thể hiện bằng $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$. Ngoài ra, công thức lượng giác được trích dẫn ở trên là những ví dụ khác của cùng một thực tế . Do đó, khái niệm về biến và mối tương quan của các biến cũng cần thiết trong hình học cũng như trong đại số.

Nhưng sự song song giữa hình học và đại số có thể còn được đẩy mạnh hơn nữa, do thực tế là độ dài, diện tích, thể tích và góc đều có thể đo được; do đó, ví dụ, kích thước của bất kỳ độ dài nào có thể được xác định bằng số lần (không nhất thiết phải là tích phân) mà nó chứa một số đơn vị đã biết tùy ý, và tương tự như vậy đối với diện tích, thể tích và góc. Công thức lượng giác, được đưa ra ở trên, là những ví dụ về thực tế này. Nhưng nó nhận được ứng dụng đỉnh cao trong hình học giải tích. Chủ đề tuyệt vời này thường được đặt tên sai là Mặt cắt hình nón phân tích, do đó tập trung sự chú ý vào chỉ một trong các phần con của nó. Có vẻ như ngành khoa học vĩ đại của Nhân loại học được đặt tên là Nghiên cứu về Mũi, do thực tế rằng mũi là một bộ phận nổi bật của cơ thể con người.

Mặc dù các thủ tục toán học trong hình học và đại số về bản chất là giống hệt nhau và gắn bó với nhau trong quá trình phát triển của chúng, nhưng nhất thiết phải có sự khác biệt cơ bản

giữa các tính chất của không gian và các tính chất của số—thực tế là tất cả sự khác biệt cơ bản giữa không gian và số. “không gian” của không gian và “số lượng” của số về cơ bản là những thứ khác nhau và phải được hiểu một cách trực tiếp. Không một ứng dụng nào của đại số vào hình học hoặc của hình học vào đại số đi một bước trên con đường xóa bỏ sự khác biệt quan trọng này.

Một sự khác biệt rất rõ ràng giữa dấu cách và số là cái trước dường như ít trừu tượng và cơ bản hơn nhiều so với cái sau. Số lượng các tổng lãnh thiên thần có thể được tính chỉ vì chúng là đồ vật. Khi chúng ta từng biết rằng tên của họ là Raphael, Gabriel và Michael, và những cái tên riêng biệt này đại diện cho những sinh vật riêng biệt, chúng ta biết mà không cần thắc mắc thêm rằng có ba người trong số họ. Tất cả sự tinh tế trên thế giới về bản chất của sự tồn tại của thiên thần không thể thay đổi thực tế này, tạo tiền đề.

Nhưng chúng ta vẫn còn mù mờ về mối quan hệ của chúng với không gian. Chúng có tồn tại trong không gian không? Có lẽ cũng vô nghĩa như vậy khi nói rằng họ ở đây, ở kia, ở bất cứ đâu, hay ở khắp mọi nơi. Sự tồn tại của chúng có thể đơn giản là không liên quan đến các địa phương trong không gian. Theo đó, trong khi các con số phải áp dụng cho tất cả mọi thứ, thì không gian không cần phải làm như vậy.

Nhận thức về vị trí của sự vật dường như đi kèm, hoặc liên quan đến nhiều hoặc tất cả các cảm giác của chúng ta. Nó độc lập với bất kỳ cảm giác cụ thể nào theo nghĩa là nó đi kèm với nhiều cảm giác. Nhưng đó là một nét đặc biệt của những sự vật mà chúng ta lĩnh hội được bằng cảm giác của mình. Sự hiểu biết trực tiếp về những gì chúng ta muốn nói về vị trí của các sự vật đối với nhau là một thứ *sui generis*, giống như sự hiểu biết về âm thanh, màu sắc, mùi vị và mùi vị. Do đó, thoạt nhìn có vẻ như toán học, trong chừng mực nó bao gồm hình học trong phạm vi của nó, không phải là trừu tượng theo nghĩa mà tính trừu tượng được gán cho nó trong Chương I.

Tuy nhiên, đây là một sai lầm; sự thật là rằng "không gian" của không gian hoàn toàn không đi vào *lý luận* hình học của chúng ta. Nó đi vào trực giác hình học của các nhà toán học theo những cách riêng và đặc biệt đối với mỗi cá nhân. Nhưng những gì đi vào lý luận chỉ là một số thuộc tính nhất định của sự vật trong không gian, hoặc của những sự vật tạo thành không gian, những thuộc tính này hoàn toàn trừu tượng theo nghĩa mà trừu tượng được định nghĩa trong Chương I.; những thuộc tính này không liên quan đến bất kỳ sự hiểu biết không gian đặc biệt nào hoặc trực giác không gian hoặc cảm giác không gian. Chúng dựa trên cơ sở chính xác giống như các tính chất toán học của số. Do đó, trực giác không gian vốn là một công cụ hỗ trợ rất cần thiết cho việc nghiên cứu hình học lại không liên quan về mặt logic: nó không đi vào các tiền đề khi chúng được phát biểu đúng đắn, cũng như không đi vào bất kỳ bước lập luận nào. Nó có tầm quan trọng thiết thực của một ví dụ, điều cần thiết để kích thích suy nghĩ của chúng ta. Các ví dụ cũng cần thiết không kém để kích thích suy nghĩ của chúng ta về số. Khi chúng ta nghĩ về "hai" và "ba", chúng ta thấy các nét vẽ liên tiếp, hoặc các quả bóng xếp thành đống, hoặc một số tập hợp vật lý khác của các vật cụ thể. Điểm đặc biệt của hình học là tính cố định và tầm quan trọng bao trùm của một ví dụ cụ thể xuất hiện trong tâm trí của chúng ta. Hình thức logic trừu tượng của các mệnh đề khi được phát biểu đầy đủ là, "Nếu bất kỳ tập hợp sự vật nào có những thuộc tính trừu tượng như vậy, thì chúng cũng có những thuộc tính trừu tượng như vậy, như vậy." Nhưng cái xuất hiện trước mắt trí óc là một tập hợp các điểm , đường thẳng, bề mặt và thể tích trong không gian: ví dụ này chắc chắn sẽ xuất hiện và là ví dụ duy nhất mang lại lợi ích cho mệnh đề. Tuy nhiên, đối với tất cả tầm quan trọng áp đảo của nó, nó chỉ là một ví dụ.

Hình học, được xem như một môn khoa học toán học, là một bộ phận của khoa học tổng quát hơn về trật tự. Nó có thể được gọi là khoa học về trật tự chiều; phẩm chất "chiều" đã được đưa ra bởi vì những hạn chế, khiến nó chỉ còn là một phần của khoa học

chung về trật tự, chẳng hạn như tạo ra các mối quan hệ chính quy của các đường thẳng với các mặt phẳng và của các mặt phẳng với toàn bộ không gian .

Dễ hiểu tầm quan trọng thực tế của không gian trong việc hình thành quan niệm khoa học về thế giới vật chất bên ngoài. Một mặt, nhận thức về không gian của chúng ta đan xen vào các cảm giác khác nhau của chúng ta và kết nối chúng lại với nhau. Chúng ta thường đánh giá rằng chúng ta chạm vào một vật thể ở cùng một vị trí như chúng ta nhìn thấy nó; và ngay cả trong những trường hợp bất thường, chúng ta chạm vào nó trong cùng một không gian như chúng ta nhìn thấy nó, và đây là thực tế cơ bản thực sự gắn kết các cảm giác khác nhau của chúng ta lại với nhau. Theo đó, nhận thức về không gian theo một nghĩa nào đó là phần chung trong các cảm giác của chúng ta. Một lần nữa, điều xảy ra là các thuộc tính trừu tượng của không gian tạo thành một phần lớn của bất cứ thứ gì được quan tâm về mặt không gian. Không quá khi nói rằng với mọi tính chất của không gian đều có một mệnh đề toán học trừu tượng tương ứng. Lấy ví dụ bất lợi nhất, một đường cong có thể có một vẻ đẹp đặc biệt về hình dạng: nhưng với hình dạng này sẽ có một số tính chất toán học trừu tượng tương ứng với hình dạng này chứ không phải hình dạng khác.

Do đó, tóm lại: (1) các thuộc tính của không gian được nghiên cứu trong hình học, giống như các thuộc tính của số, là các thuộc tính thuộc về sự vật với tư cách là sự vật, và không liên quan đặc biệt đến bất kỳ phương thức lĩnh hội cụ thể nào: (2) Nhận thức không gian đi kèm với những cảm giác của chúng ta, có lẽ là tất cả chúng, chắc chắn là rất nhiều; nhưng nó dường như không phải là phẩm chất cần thiết của mọi thứ mà tất cả chúng nên tồn tại trong một không gian hoặc trong bất kỳ không gian nào.

CHƯƠNG XVII

ĐỊNH LƯỢNG

TRONG chương trước, chúng ta đã chỉ ra rằng độ dài có thể đo được theo đơn vị chiều dài nào đó, diện tích tính theo đơn vị diện tích và thể tích tính theo đơn vị thể tích.

Khi chúng ta có một tập hợp những thứ chẳng hạn như độ dài có thể đo được theo bất kỳ một trong số chúng, chúng ta nói rằng chúng là những đại lượng cùng loại. Do đó, độ dài là đại lượng cùng loại, diện tích cũng vậy và thể tích cũng vậy. Nhưng diện tích không phải là một đại lượng cùng loại với chiều dài, cũng không phải là một đại lượng cùng loại với thể tích. Chúng ta hãy suy nghĩ thêm một chút về ý nghĩa của việc đo lường được, lấy độ dài làm ví dụ.

Độ dài được đo bằng quy tắc chân. Bằng cách vận chuyển thước kẻ từ nơi này sang nơi khác, chúng ta đánh giá độ dài bằng nhau. Một lần nữa, ba chiều dài liền kề, mỗi chiều dài một foot, tạo thành một chiều dài ba foot. Như vậy để đo độ dài ta phải xác định sự bằng nhau của các độ dài và phép cộng các độ dài. Khi một phép thử nào đó được áp dụng, chẳng hạn như việc vận chuyển thước kẻ, chúng ta nói rằng các độ dài bằng nhau; và khi một số quy trình đã được áp dụng để đảm bảo độ dài liền kề và không chồng chéo, chúng tôi nói rằng độ dài đã được thêm vào để tạo thành một độ dài nguyên vẹn. Nhưng chúng ta không thể tùy tiện coi bất kỳ phép thử nào là phép thử đẳng thức và bất kỳ quá trình nào là quá trình cộng. Kết quả của các phép toán cộng và phán đoán đẳng thức phải phù hợp với các điều kiện định trước nhất định. Ví dụ: phép cộng hai độ dài lớn hơn phải tạo ra độ dài lớn hơn độ dài tạo ra khi cộng hai độ dài nhỏ hơn. Những điều kiện định trước này khi được xây dựng chính xác có thể được gọi là các tiên đề về lượng. Câu hỏi duy nhất về sự thật hay giả của chúng có thể nảy sinh là liệu khi các tiên đề được thỏa mãn, chúng ta có nhất thiết phải đạt được cái mà người bình

thường gọi là số lượng hay không. Nếu chúng ta không làm như vậy, thì cái tên "các tiên đề về lượng" sẽ bị đánh giá sai—chỉ vậy thôi.

Những tiên đề về lượng này hoàn toàn trừu tượng, giống như các tính chất toán học của không gian. Chúng giống nhau đối với mọi đại lượng và chúng giả định trước không có phương thức nhận thức đặc biệt nào. Các ý tưởng liên quan đến khái niệm về số lượng là phương tiện mà theo đó một sự liên tục như đường thẳng, diện tích hoặc thể tích có thể được chia thành các phần xác định. Sau đó, những phần này được tính; để các con số có thể được sử dụng để xác định các thuộc tính chính xác của một tổng thể liên tục.

Nhận thức của chúng ta về dòng thời gian và sự nối tiếp của các sự kiện là một ví dụ điển hình về việc áp dụng những ý tưởng về số lượng này. Chúng ta đo thời gian (như đã nói khi xem xét tính tuần hoàn) bằng sự lặp lại của các sự kiện tương tự—sự đốt cháy các inch liên tiếp của một ngọn nến đồng nhất, chuyển động quay của trái đất đối với các ngôi sao cố định, chuyển động quay của kim đồng hồ là tất cả các ví dụ về sự lặp lại như vậy. Các sự kiện thuộc loại này thay thế quy tắc chân liên quan đến độ dài. Không cần thiết phải giả định rằng các sự kiện thuộc bất kỳ một trong các loại này đều có thời lượng chính xác như nhau ở mỗi lần lặp lại. Điều cần thiết là phải biết một quy tắc sẽ cho phép chúng ta biểu thị khoảng thời gian tương đối của, chẳng hạn, hai ví dụ về một loại nào đó. Ví dụ, nếu muốn, chúng ta có thể giả sử rằng tốc độ quay của trái đất đang giảm, do đó mỗi ngày dài hơn ngày trước đó một phần phút của giây. Quy tắc như vậy cho phép chúng ta so sánh độ dài của bất kỳ ngày nào với bất kỳ ngày nào khác. Nhưng điều cốt yếu là một chuỗi các lần lặp lại, chẳng hạn như các ngày liên tiếp, nên được coi là chuỗi tiêu chuẩn; và, nếu các sự kiện khác nhau của chuỗi đó không được coi là có thời lượng bằng nhau, thì phải nêu rõ quy tắc quy định thời lượng được chỉ định cho mỗi ngày theo thời lượng của bất kỳ ngày nào khác.

Vậy thì những điều kiện cần thiết mà một quy tắc như vậy phải có là gì? Trước hết, nó sẽ dẫn đến việc ấn định thời lượng gần như bằng nhau cho các sự kiện mà theo lẽ thông thường đánh giá là có thời lượng bằng nhau. Một quy tắc làm cho các ngày có độ dài khác nhau một cách dữ dội, và làm cho tốc độ của các hoạt động có vẻ giống nhau thay đổi hoàn toàn không tương xứng với mức độ nhỏ bé rõ ràng của sự khác biệt giữa chúng, sẽ không bao giờ có tác dụng. Do đó, điều kiện tiên quyết đầu tiên là sự nhất trí chung với lẽ thường. Nhưng điều này hoàn toàn không đủ để xác định quy luật, vì lẽ thường là một người quan sát sơ sài và rất dễ hài lòng. Điều kiện tiên quyết tiếp theo là những điều chỉnh nhỏ của quy tắc phải được thực hiện sao cho có thể đưa ra những phát biểu đơn giản nhất có thể về các quy luật tự nhiên. Ví dụ, các nhà thiên văn học cho chúng ta biết rằng vòng quay của trái đất đang chậm lại, do đó mỗi ngày dài ra thêm một phần nhỏ không thể tưởng tượng nổi của một giây. Lý do duy nhất cho khẳng định của họ (như đã nêu đầy đủ hơn trong phần thảo luận về tính tuần hoàn) là nếu không có nó, họ sẽ phải từ bỏ các định luật chuyển động của Newton. Để giữ cho các định luật về chuyển động của đơn giản, chúng thay đổi thước đo thời gian. Đây là một thủ tục hoàn toàn hợp pháp miễn là nó được hiểu thấu đáo.

Những gì đã nói ở trên về bản chất trừu tượng của các thuộc tính toán học của không gian được áp dụng với những thay đổi ngôn từ thích hợp đối với các thuộc tính toán học của thời gian. Cảm giác về dòng thời gian đi kèm với mọi cảm giác và nhận thức của chúng ta, và trên thực tế, tất cả những gì chúng ta quan tâm liên quan đến thời gian đều có thể song song với các tính chất toán học trừu tượng mà chúng ta gán cho nó. Ngược lại, những gì đã nói về hai điều kiện tiên quyết đối với quy tắc mà chúng ta xác định độ dài của ngày, cũng áp dụng cho quy tắc xác định độ dài của thước đo yard—cụ thể là thước đo yard dường như giữ nguyên độ dài như nó di chuyển xung quanh. Theo đó, bất kỳ quy tắc nào cũng phải đưa ra rằng, ngoài những thay đổi nhỏ, nó

vẫn có độ dài không thay đổi; Một lần nữa, điều kiện tiên quyết thứ hai là điều này, một quy tắc xác định cho những thay đổi nhỏ sẽ được nêu ra cho phép diễn đạt đơn giản nhất các quy luật tự nhiên. Ví dụ, phù hợp với điều kiện tiên quyết thứ hai, các biện pháp sân phải mở rộng và co lại với sự thay đổi của nhiệt độ theo các chất mà chúng được tạo ra.

Ngoài thực tế là các cảm giác của chúng ta đi kèm với nhận thức về vị trí và thời lượng, và rằng các đường, diện tích, thể tích và khoảng thời gian, mỗi thứ đều là đại lượng theo cách của chúng, lý thuyết số sẽ được sử dụng rất phụ trong việc khám phá các quy luật của Vũ trụ, Như nó vốn có, khoa học vật lý dựa trên các ý tưởng chính về số lượng, số lượng, không gian và thời gian. Các khoa học toán học liên quan đến chúng không tạo thành toàn bộ toán học, nhưng chúng là nền tảng của vật lý toán học hiện đang tồn tại.

GHI CHÚ

A (p. 35).—Khi đọc các phương trình này, cần lưu ý rằng dấu ngoặc vuông được sử dụng trong biểu tượng toán học có nghĩa là các phép toán bên trong nó sẽ được thực hiện trước tiên. Do đó, $(1+3)+2$ hướng dẫn chúng ta trước tiên cộng 3 vào 1, sau đó cộng 2 vào kết quả; và $1+(3+2)$ hướng dẫn chúng tôi trước tiên cộng 2 vào 3, sau đó cộng kết quả vào 1. Lại một ví dụ số của phương trình (5) là

$$2 \times (3+4) = (2 \times 3) + (2 \times 4).$$

Chúng tôi thực hiện đầu tiên các hoạt động trong ngoặc và có được

$$2 \times 7 = 6 + 8$$

điều đó rõ ràng là đúng.

B (p. 87).—Tỷ lệ cơ bản này $\frac{SP}{PN}$ được gọi là độ lệch tâm của đường cong. Hình dạng của đường cong, như khác với tỷ lệ hoặc kích thước của nó, phụ thuộc vào giá trị của độ lệch tâm của nó. Do đó, thật sai lầm khi nghĩ về hình elip nói chung hoặc về hyperbol nói chung là có một hình dạng xác định trong cả hai trường hợp. Các hình elip có độ lệch tâm khác nhau có hình dạng khác nhau và kích thước của chúng phụ thuộc vào độ dài của các trục chính của chúng. Một hình elip có độ lệch tâm nhỏ gần như là một hình tròn, và một hình elip có độ lệch tâm nhỏ hơn một chút là một hình bầu dục phẳng dài. Tất cả các parabol đều có cùng độ lệch tâm và do đó có cùng hình dạng, mặc dù chúng có thể được vẽ theo các tỷ lệ khác nhau.

C (p. 131).—Nếu một chuỗi với tất cả các số hạng dương của nó là hội tụ, thì chuỗi đã sửa đổi được tìm thấy bằng cách đặt một số số hạng dương và một số phủ định theo quy luật xác định nào đó cũng hội tụ. Mỗi một trong tập hợp các chuỗi được tìm thấy, bao gồm cả chuỗi ban đầu, được gọi là “hội tụ tuyệt đối.” Nhưng một chuỗi có các phần tử dương và một phần âm có thể

hội tụ, mặc dù chuỗi tương ứng với tất cả các phần tử của nó dương là phân kỳ. Ví dụ, loạt

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

là hội tụ mặc dù chúng ta vừa chứng minh rằng

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

là khác nhau. Các chuỗi hội tụ như vậy, không hội tụ tuyệt đối, khó xử lý hơn nhiều so với các chuỗi hội tụ tuyệt đối.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

GHI CHÚ VỀ NGHIÊN CỨU TOÁN HỌC

CÁI khó khăn mà những người mới bắt đầu gặp phải khi nghiên cứu môn khoa học này là do lượng lớn chi tiết kỹ thuật được cho phép tích lũy trong sách giáo khoa tiểu học, che khuất những ý tưởng quan trọng.

Các môn học đầu tiên, ngoài kiến thức về số học được giả định trước, phải là hình học sơ cấp và đại số sơ cấp. Các khóa học trong cả hai môn học nên ngắn gọn, chỉ đưa ra những ý tưởng cần thiết; đại số nên được nghiên cứu bằng đồ thị, để trong thực tế, các ý tưởng về hình học tọa độ cơ bản cũng đang được đồng hóa. Cặp môn học tiếp theo sẽ là lượng giác cơ bản và hình học tọa độ của đường thẳng và đường tròn. Chủ đề thứ hai là một chủ đề ngắn; vì nó thực sự hợp nhất với đại số. Sau đó, học sinh được chuẩn bị để bước vào phần conic, một khóa học rất ngắn về các phần conic hình học và một khóa học dài hơn về hình nón giải tích. Nhưng trong tất cả các khóa học này, bạn nên hết sức cẩn thận để không làm quá tải trí óc với nhiều chi tiết hơn mức cần thiết để minh họa các ý tưởng cơ bản.

Phép tính vi phân và sau đó là phép tính tích phân hiện vẫn bị tấn công trên cùng một hệ thống. Một giáo viên giỏi sẽ minh họa chúng bằng cách xem xét các trường hợp đặc biệt trong khóa học về đại số và hình học tọa độ. Một số cuốn sách ngắn về hình học ba chiều cũng phải được đọc.

Khóa học toán cơ bản này là đủ cho một số loại nghề nghiệp chuyên nghiệp. Nó cũng là bước chuẩn bị cần thiết cho bất kỳ ai muốn nghiên cứu chủ đề vì lợi ích nội tại của nó. Bây giờ anh ấy đã sẵn sàng để bắt đầu một khóa học dài hơn. Tuy nhiên, anh ta không được hy vọng có thể làm chủ nó như một tổng thể. Khoa học đã phát triển đến mức có lẽ không một nhà toán học còn sống nào có thể tuyên bố đã đạt được điều này.

Chuyển sang các chuyên luận nghiêm túc về chủ đề sẽ được

đọc *sau* khóa học sơ bộ này, có thể đề cập đến những điều sau đây: *Hình học thuần túy* của Cremona (Bản dịch tiếng Anh, Nhà xuất bản Clarendon, Oxford), *Treatise on Trigonometry của Hobson* , *Luận về Đại số* của Chrystal (2 tập), *Các phần Conic* của Salmon, *Phép tính vi phân* của Lamb và một số cuốn sách về *Phương trình vi phân*. Học sinh có thể sẽ không mong muốn hướng sự chú ý đồng đều vào tất cả các môn học này, nhưng sẽ học một hoặc nhiều môn học trong số chúng, tùy theo sở thích của anh ta. Sau đó, anh ta sẽ sẵn sàng chọn những tác phẩm nâng cao hơn cho mình và lao vào những phần cao hơn của chủ đề. Nếu sở thích của anh ấy nằm ở phân tích, thì bây giờ anh ấy nên nắm vững một chuyên luận cơ bản về lý thuyết Hàm của Biến phức; nếu anh ấy thích chuyên sâu hơn về Hình học, bây giờ anh ấy phải tiếp tục với các chuyên luận tiêu chuẩn về Hình học giải tích ba chiều. Nhưng ở giai đoạn này của sự nghiệp học tập, anh ta sẽ không cần đến lời khuyên của ghi chú này.

Tôi đã cố tình không đề cập đến bất kỳ tác phẩm tiểu học nào. Chúng rất nhiều, và có nhiều giá trị khác nhau, nhưng không có cái nào vượt trội hơn hẳn đến mức cần phải đặc biệt nhắc đến tên để loại trừ tất cả những cái khác.

CHỈ MỤC

ẩn số, 7, 11
Abel, 101
Abscissa, 58
Adams, 143
Ahmes, 43
Alexander Đại đế, 82, 83
Ampère, 17
Apollonius of Perga, 84, 85
Archimedes, 19
Aristotle, 15, 23, 82
Axes, 79

Bacon, 101
Ball, W. W. R., 34
Beaconsfield, Lord, 22
Berkeley, Bishop, 147
Bhaskara, 34
Biến, 11, 49, 155
Biến, The, 8, 27, 152
Bình phương đường tròn, 120
Bản chất trừu tượng của Hình học, 157

Cantor, Georg, 48
Chuyển động, Định luật đầu tiên, 24
Chuỗi, 45, 125
Chuỗi lũy thừa, 136
Circle, 83, 116
Clerk Maxwell, 18
Columbus, 77
Constants, 74
Copernicus, 25, 88
Cosine, 117
Coulomb, 17
Các bước, 48
Các mặt cắt hình nón, 82
Cộng hưởng, 109, 110
Cực, 76

Darwin, 89, 143
Điện, 16
Định kỳ, 106
Động, 15
Descartes, 58, 71, 74, 78, 142
Directrix, 87
Dynamical Explanation, 4
Dynamics, 23
Dòng hình học, 133
Dòng nhỏ gọn, 45
Dòng điện, 17
Dạng, Đại số, 39, 49, 74

Ellip, 76
Ellipse, 25, 83
Euclid, 72

Faraday, 18
Fermat, 142
Fluxions, 142
Focus, 87
Force, 15
Franklin, 16, 77

Galileo, 15, 23, 77
Galvani, 17
Geometry, 19
Giai đoạn, 121
Gilbert, Dr., 16
Giá trị của hàm, 94
Giải thích động, 5, 26
Giải tích điều hòa, 124
Giới hạn, 46
Giới hạn của hàm, 147
Giới hạn của một chuỗi, 128
Graphs, 96
Gravitation, 14, 89

Halley, 89
Harriot, Thomas, 39
Herz, 18
Hiero, 20
Hipparchus, 112
Hyperbola, 84
Hàm không liên tục, 97
Hàm liên tục, 97
Hàm liên tục (*defined*), 104
Hàm suy ra, 151
Hàm số, 94
Hình học, 153
Hình học tọa độ, 71
Hình học xạ ảnh, 90
Hình tròn, 76
Hình trụ tròn, 92
Hằng số, 41
Hệ số vi phân, 151
Hội tụ, 130
Hội tụ tuyệt đối, 163
Hội tụ, Tuyệt đối, 163

Incommensurable ratios, 43
Interval, 102

Kepler, 25, 88
Khoảng cách, 15
Kiểm tra chéo, 114
Ký hiệu Ả Rập, 34

Laputa, 2
Laws of Motion, 161
Leibniz, 6, 141
Leonardo da Vinci, 23
Leverrier, 143
Light, 18
Locus, 76, 91
Luật hình bình hành, 61
Lượng giác, 112
Lỗi bình thường, Đường cong của, 138

Macaulay, 101
Malthus, 89
Marcellus, 20
Mass, 15
Mechanics, 26
Menaechmus, 82
Mặt cắt hình nón phân tích, 155
Mối quan hệ giữa các biến, 8

Newton, 3, 6, 15, 18–20, 24, 26, 89, 141

Öersted, 17
Ordered Couples, 57
Origin, 59, 80

Pappus, 87
Parabola, 83
Parameters, 74
Pencils, 90
Period, 110
Phân kỳ, 130
Phân số, 43
Phép tính tích phân, 144
Phép tính vi phân, 141
Pitt, William, 125
Pizarro, 77
Plutarch, 20
Ptolemy, 88, 112
Pythagoras, 5

Ratio, 43
Rectangle, 33
Rosebery, Lord, 125

Seidel, 136
Shelley (trích từ), 141
Similarity, 154
Sine, 117
Standard of Approximation, 148
Steps, 59
Stifel, 52
Stokes, Sir George, 135
Surveys, 113
Swift, 2
Số dương và số âm, 50
Số lượng, 159
Số lượng nhỏ vô hạn, 146
Số thực, 44
Số ảo, 53
Sự hội tụ không đồng nhất, 134
Sự hội tụ đồng nhất, 134

Tam giác, 153
Tham số, 41
Thiên văn học, 88, 112
Thời gian, 160
Thứ tự, 125
Thứ tự, Loại, 45, 126
Time, 107
Tiên đề về số lượng, 159
Tiêu chuẩn của phép xấp xỉ, 129
Tiêu chuẩn xấp xỉ, 102
Tiếp tuyến, 143, 144
Transportation, Vector of, 30
Triangle, 113
Trọng lượng riêng, 22
Trừu tượng (*defined*), 4
Tính chu kỳ, 140
Tính trừu tượng (*defined*), 2
Tính tuần hoàn, 121
Tính tổng quát trong toán học, 49
Tương tự, 114
Tọa độ, 58
Tốc độ tăng của các hàm, 143
Tổng bằng vô cực, 129
Tỷ lệ bản đồ, 115
Tỷ lệ chéo, 90

Variable Function, 95
Vectors, 29, 51, 59
Vertex, 85
Volta, 17
Vùng lân cận, 103

Wallace, 143
Weierstrass, 101, 147, 148

Xấp xỉ, 127

Zero, 37, 64

Điện từ học, 16
Đại lượng phức, 69
Đại lượng tưởng tượng, 69
Định luật chuyển động, 108
Định luật hình bình hành, 29, 80
Định luật Kepler, 89
Định lý bổ sung, 137
Định lý của Taylor, 101
Định lý Fourier, 123
Định lý Taylor, 101
Đối số của hàm, 94
Độ lệch tâm, 163